
Test de positionnement

Fondements Mathématiques

45 minutes



Fillère Mathématiques Appliquées & Modélisation
3^{ième} année

Enseignant: [Denis Périce](#)
Bâtiment Braconnier - bureau 229
perice@math.univ-lyon1.fr

03/09/2026.

Problème : Dessiner un graphe de fonction

On étudie la fonction réelle $f(x) := \frac{x+1}{x}e^x$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Résoudre $f(x) \geq 0$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Quelles sont les asymptotes verticales et horizontales de f ?
4. Calculer f' et dresser le tableau de variation de f . Quels sont les extrema (minimum ou maximum) locaux de f ?
5. Soit x_c un point critique de f , montrer que $f''(x_c) = \frac{2-x_c}{x_c^3}e^{x_c}$.
6. Montrer que x_0 , l'unique maximum local de f , est négatif. En déduire que $f''(x_0) < 0$.
7. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}f''(x) = 1$.
8. En déduire l'existence d'un point d'inflexion de f .
9. Esquisser le graphe de f en représentant les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Question 1. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$?

☐ A) 0

☐ B) $\frac{1}{2}$

☐ C) 1

☐ D) $\frac{1}{6}$

☐ E) 2

☐ F) $+\infty$

Question 2. Le développement limité de $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0 est :

☐ A) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

☐ B) $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

☐ C) $1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

☐ D) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

☐ E) $1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

☐ F) $1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Question 3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = -16$ est :

☐ A) $\left\{ 2e^{i\frac{k\pi}{2}}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$

☐ B) $\left\{ 4e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$

☐ C) $\left\{ 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$

☐ D) $\left\{ 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$

☐ E) $\left\{ 16e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$

☐ F) $\left\{ 2e^{i\frac{\pi}{4}} \right\}$

Question 4. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - iz - 1 - i = 0$ sont :

☐ A) $\{1 - i, -1\}$

☐ B) $\{2 + 2i, -2\}$

☐ C) $\{1, -1 - i\}$

☐ D) $\{1 + i, -1\}$

☐ E) $\{1 + i, 1 - i\}$

☐ F) L'équation n'a pas de solution car le discriminant n'est pas positif

Question 5. En utilisant la définition $\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \ln(2)\right)$?

☐ A) 0

☐ D) $-\frac{3}{4}$

☐ B) $-\frac{3i}{4}$

☐ E) $-\frac{5i}{4}$

☐ C) $\frac{3i}{4}$

☐ F) $-i \sin(\ln 2)$

Question 6. Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$. Que vaut son coefficient de Fourier complexe $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$, pour $n \in \mathbb{Z}^*$?

☐ A) $\frac{(-1)^{n+1} i}{n}$

☐ D) $\frac{(-1)^n}{n^2}$

☐ B) $\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

☐ E) $\frac{i(-1)^n}{n}$

☐ C) $\frac{(-1)^n}{2in}$

☐ F) $\frac{1}{in}$

Question 7. En appliquant la formule de Parseval $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ à la fonction de la

question précédente, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} =$

☐ A) $\frac{\pi^2}{12}$

☐ D) $\frac{\pi^2}{8}$

☐ B) $\frac{\pi^2}{3}$

☐ E) $\frac{\pi^2}{2}$

☐ C) $\frac{\pi^2}{6}$

☐ F) $\frac{\pi^4}{90}$

Question 8. Soit g la fonction 2π -périodique définie par $g(x) = 1$ sur $]0, \pi[$ et $g(x) = -1$ sur $]-\pi, 0[$. Vers quelle valeur sa série de Fourier converge-t-elle en $x = 0$?

☐ A) 1

☐ D) $\frac{2}{\pi}$

☐ B) -1

☐ E) La série diverge en ce point

☐ C) $\frac{1}{2}$

☐ F) 0