
TD - Fondements Mathématiques

Corrigé



Fillère Mathématiques Appliquées & Modélisation
3^{ième} année

Enseignant: Denis Périce
Bâtiment Braconnier - bureau 229
perice@math.univ-lyon1.fr

Contents

I - Fonctions réelles à une variable	2
II - Nombres complexes	12
III - Séries de Fourier	13

Semestre d'automne 2026.

Fonctions réelles à une variable

Problème I.1 : Dessiner un graphe

On considère

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

1. Le domaine de définition est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. On factorise :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x}.$$

Comme

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

le signe de $f(x)$ est celui de $(x+1)/x$. Ainsi,

$$f(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[.$$

3. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

4. On a

$$\frac{f(x)}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1, \quad \frac{f(x)}{1/x} = 1 + x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^2, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

5. La dérivée est

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$

Posons $\alpha = 2^{-1/3}$. Le dénominateur étant positif, f' est négative pour $x < \alpha$, hors 0, et positive pour $x > \alpha$.

Intervalle	$] -\infty, 0[$	$]0, \alpha]$	$[\alpha, +\infty[$
Signe de f'	-	-	+
Variation de f	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow \frac{3}{2^{2/3}}$	$\frac{3}{2^{2/3}} \nearrow +\infty$

Puisque $1/\alpha = 2\alpha^2$, on a

$$f(\alpha) = 3\alpha^2 = \frac{3}{2^{2/3}}.$$

L'unique extremum local est donc un minimum local :

$$M = \left(2^{-1/3}, \frac{3}{2^{2/3}}\right).$$

Ce n'est pas un minimum global sur $\mathcal{D}_f$, car f n'est pas minorée.

6. On calcule

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^3}.$$

Cette dérivée seconde s'annule et change de signe en -1 . L'unique point d'inflexion est donc

$$A = (-1, 0).$$

Le point 0 est exclu du domaine.

7. Le signe de f'' donne

x	$] -\infty, -1[$	$] -1, 0[$	$] 0, +\infty[$
$f''(x)$	+	-	+
f	convexe	concave	convexe

8. La branche négative descend de $+\infty$ vers $-\infty$, en passant par A . La branche positive descend jusqu'à M , puis remonte vers $+\infty$.

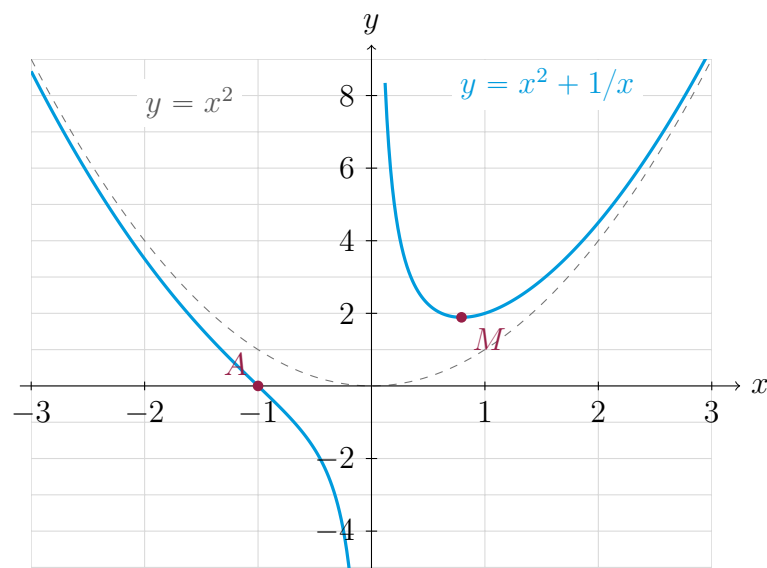
De plus,

$$f(x) - x^2 = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

La courbe se rapproche donc de la parabole $y = x^2$, par-dessous à gauche et par-dessus à droite.

La tangente en A a pour équation

$$y = f'(-1)(x + 1) = -3(x + 1).$$



Problème I.2 : Théorèmes de Taylor

On suppose $f \in \mathcal{C}^4(I)$, $a \in I$ et, dans un premier temps, $x > a$.

Formule de Taylor avec reste intégral

1. Le théorème fondamental de l'analyse affirme que, pour g continue, la fonction

$$G(y) = \int_a^y g(t) dt$$

est dérivable et vérifie $G' = g$. En particulier,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t_1) dt_1.$$

2. En appliquant ce résultat à f' ,

$$f'(t_1) = f'(a) + \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2.$$

Par substitution,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2 dt_1.$$

3. De même,

$$f''(t_2) = f''(a) + \int_a^{t_2} f'''(t_3) dt_3.$$

Comme

$$\int_a^x \int_a^{t_1} 1 dt_2 dt_1 = \int_a^x (t_1 - a) dt_1 = \frac{(x-a)^2}{2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \\ &\quad + \int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} f'''(t_3) dt_3 dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

4. Le domaine d'intégration est

$$a \leq t_3 \leq t_2 \leq t_1 \leq x.$$

En posant $t = t_3$ et en inversant l'ordre,

$$\begin{aligned} &\int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} g(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \\ &= \int_a^x g(t) \int_t^x \int_{t_2}^x 1 dt_1 dt_2 dt \\ &= \int_a^x g(t) \int_t^x (x - t_2) dt_2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x - t)^2 g(t) dt. \end{aligned}$$

5. En prenant $g = f'''$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt.$$

Ainsi,

$$R_2(x) = \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt.$$

Formule de Taylor–Lagrange

6. La continuité de f''' sur le segment compact $[a, x]$ assure l'existence de son minimum m et de son maximum M . Comme $(x-t)^2 \geq 0$,

$$\frac{m}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt \leq R_2(x) \leq \frac{M}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt.$$

7. L'intégrale vaut $(x - a)^3/3$, donc

$$m \frac{(x - a)^3}{3!} \leq R_2(x) \leq M \frac{(x - a)^3}{3!}.$$

8. Puisque $x > a$,

$$m \leq \frac{3!R_2(x)}{(x - a)^3} \leq M.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, x]$ tel que

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x - a)^3.$$

9. On en déduit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - a)^3.$$

10. En prenant les valeurs absolues,

$$\left| f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 \right| \leq \sup_{t \in [a, x]} |f'''(t)| \frac{|x - a|^3}{3!}.$$

Formule de Taylor–Young

11. Choisissons $\delta > 0$ tel que $[a - \delta, a + \delta] \subset I$. Par continuité, il existe $K \geq 0$ tel que $|f'''| \leq K$ sur ce segment.

Taylor–Lagrange, également valable à gauche de a comme justifié à la question 13, donne

$$\left| \frac{R_2(x)}{(x - a)^2} \right| \leq \frac{K}{6} |x - a| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

12. Ainsi $R_2(x) = o((x - a)^2)$, et

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2).$$

13. Posons $h = x - a$ et $F(s) = f(a + sh)$. En appliquant la formule déjà démontrée à F entre 0 et 1, on obtient

$$R_2(x) = \frac{h^3}{2} \int_0^1 (1 - s)^2 f'''(a + sh) ds.$$

Le poids $(1 - s)^2$ est positif quel que soit le signe de h . Les arguments de moyenne pondérée et de majoration restent donc valables pour $x < a$, avec $c \in [x, a]$.

Le changement de variable $t = a + sh$ redonne le reste intégral avec l'intégrale orientée de a à x .

(Bonus) Généralisation à l'ordre n

On suppose $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et on pose

$$J = [\min(a, x), \max(a, x)].$$

14. Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental.

Supposons la formule connue à l'ordre $n - 1$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\ = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

On utilise ici

$$u = f^{(n)}(t), \quad v = -\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

La récurrence donne donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

15. Par le changement de variable $t = a + s(x-a)$,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(x-a)) ds.$$

La continuité et la positivité du poids donnent un $c \in J$ tel que l'intégrale vaut

$$f^{(n+1)}(c) \int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}.$$

Ainsi,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

16. En prenant les valeurs absolues,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \sup_{t \in J} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

17. Pour l'exponentielle et $a = 0$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{\max(0,x)} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

À x fixé, le membre de droite tend vers 0, car le rapport des termes successifs de $|x|^{n+1}/(n+1)!$ vaut $|x|/(n+2) \rightarrow 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Autour de tout $a \in \mathbb{R}$,

$$e^x = e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^k}{k!},$$

ce qui établit l'analyticité sur $\mathbb{R}$.

18. La fonction $f^{(n+1)}$ étant localement bornée,

$$R_n(x) = O(|x - a|^{n+1}) = o((x - a)^n).$$

Finalement,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Problème I.3 : Développements limités

Tous les développements suivants sont pris lorsque $x \rightarrow 0$.

1. Les formules de Taylor donnent

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \\ \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

2. Par multiplication,

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \\ &= \boxed{1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}. \end{aligned}$$

Pour la composition, posons $u = \sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$. Comme $u^2 = x^2 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$,

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin x) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}. \end{aligned}$$

3. Pour $x \in [0, 0.1]$, Taylor–Lagrange donne

$$|e^x - P_2(x)| \leq \sup_{t \in [0, x]} e^t \frac{x^3}{3!} \leq \frac{e^{0.1}}{3!} x^3.$$

4. Puisque $P_2(0.1) = 1.105$ et $e^{0.1} < 2$,

$$\boxed{|e^{0.1} - 1.105| < \frac{2}{6} \times 10^{-3}.$$

5. Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k/k!$. L'inégalité de Taylor–Lagrange donne

$$\begin{aligned} |e^{0.1} - P_n(0.1)| &\leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} 10^{-(n+1)} \\ &< \frac{0.2}{(n+1)!} 10^{-n} < 10^{-n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P_n(0.1)$ approche $e^{0.1}$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-n} .

Cette précision numérique repose sur la borne de Taylor–Lagrange ; la seule notation $o(x^n)$ ne fournit pas de borne explicite en 0.1.

Problème I.4 : Résolution asymptotique d'une équation

On pose

$$g(x) = x + \ln(1+x), \quad x \in]-1, +\infty[.$$

1. La fonction g est continue et

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0.$$

Elle est strictement croissante, avec

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

L'équation $g(x) = \epsilon$ admet donc une unique solution.

Comme $g(0) = 0 < \epsilon$, cette solution x_ϵ est positive. L'équation et $\ln(1+x_\epsilon) > 0$ donnent

$$0 < x_\epsilon < \epsilon.$$

Par encadrement,

$$\boxed{x_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0.}$$

2. Le développement du logarithme en x_ϵ donne

$$\boxed{\epsilon = 2x_\epsilon - \frac{x_\epsilon^2}{2} + \frac{x_\epsilon^3}{3} + o(x_\epsilon^3).}$$

3. Cherchons

$$x_\epsilon = a\epsilon + b\epsilon^2 + c\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

Alors

$$x_\epsilon^2 = a^2\epsilon^2 + 2ab\epsilon^3 + o(\epsilon^3), \quad x_\epsilon^3 = a^3\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

En substituant,

$$\epsilon = 2a\epsilon + \left(2b - \frac{a^2}{2}\right)\epsilon^2 + \left(2c - ab + \frac{a^3}{3}\right)\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

L'identification donne

$$2a = 1, \quad 2b - \frac{a^2}{2} = 0, \quad 2c - ab + \frac{a^3}{3} = 0.$$

D'où

$$\boxed{a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{16}, \quad c = -\frac{1}{192}.}$$

4. Pour justifier le développement, posons

$$p(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{16} - \frac{\epsilon^3}{192}.$$

Les calculs précédents donnent $g(p(\epsilon)) = \epsilon + o(\epsilon^3)$. Comme $g' \geq 1$, le théorème des accroissements finis implique, pour ϵ assez petit,

$$|x_\epsilon - p(\epsilon)| \leq |g(x_\epsilon) - g(p(\epsilon))| = o(\epsilon^3).$$

Ainsi,

$$x_\epsilon = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{16} - \frac{\epsilon^3}{192} + o(\epsilon^3).$$

Problème I.5 : Approximation d'une intégrale

La fonction $\sin x/x$ se prolonge continûment en 0 par la valeur 1.

1. Le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

donne, après division par x ,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

2. En intégrant terme à terme,

$$I(\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} + \frac{\epsilon^5}{600} + o(\epsilon^5).$$

Pour justifier le reste, si $r(x) = o(x^4)$, alors pour tout $\eta > 0$, $|r(x)| \leq \eta x^4$ près de 0. Ainsi, pour ϵ assez petit,

$$\left| \int_0^\epsilon r(x) dx \right| \leq \eta \int_0^\epsilon x^4 dx = \frac{\eta}{5} \epsilon^5.$$

Le reste intégré est donc $o(\epsilon^5)$.

3. Le polynôme de Taylor du sinus à l'ordre 4 est $x - x^3/6$. Comme $|\sin^{(5)}(t)| = |\cos t| \leq 1$,

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^5}{120} \quad (x \geq 0).$$

Après division par $x > 0$ et intégration,

$$\begin{aligned} \left| I(\epsilon) - \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} \right) \right| &\leq \int_0^\epsilon \left| \frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} \right| dx \\ &\leq \int_0^\epsilon \frac{x^4}{120} dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| I(\epsilon) - \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} \right) \right| \leq \frac{\epsilon^5}{600}.$$

Problème I.6 : (Bonus) Une série asymptotique divergente : la série d'Euler

L'intégrale définissant $f(\epsilon)$ converge pour $\epsilon > 0$, car

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} \leq e^{-t}.$$

1. La somme géométrique finie vérifie

$$(1 + u) \sum_{k=0}^{n-1} (-u)^k = 1 - (-u)^n.$$

En divisant par $1 + u$,

$$\frac{1}{1 + u} = \sum_{k=0}^{n-1} (-u)^k + \frac{(-u)^n}{1 + u}.$$

2. On prend $u = \epsilon t$, puis on intègre la somme finie contre e^{-t} . En utilisant

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!,$$

on obtient

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + R_n(\epsilon),$$

où

$$R_n(\epsilon) = (-\epsilon)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt.$$

3. Comme $1 + \epsilon t \geq 1$,

$$|R_n(\epsilon)| \leq \epsilon^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n! \epsilon^n.$$

Ainsi, pour chaque n fixé,

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + O(\epsilon^n) \quad (\epsilon \rightarrow 0^+).$$

4. Pour $\epsilon \neq 0$,

$$\frac{(k+1)! |\epsilon|^{k+1}}{k! |\epsilon|^k} = (k+1) |\epsilon| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Les termes ne tendent pas vers 0. La série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! (-\epsilon)^k$$

diverge donc pour tout $\epsilon \neq 0$.

5. On a

$$\frac{B_{n+1}(\epsilon)}{B_n(\epsilon)} = (n+1)\epsilon.$$

La suite décroît lorsque $(n+1)\epsilon < 1$, croît lorsque $(n+1)\epsilon > 1$, et deux termes successifs sont égaux lorsque $(n+1)\epsilon = 1$.

6. Si $1/\epsilon$ n'est pas entier, le minimum est atteint en $n_\epsilon = \lfloor 1/\epsilon \rfloor$. Si $1/\epsilon = m$ est entier, les indices $m-1$ et m donnent le même minimum.

On peut toujours choisir

$$n_\epsilon = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\epsilon}.$$

7. Posons $N = 1/\epsilon$ et $n_\epsilon = N + \delta$, avec δ borné. Par Stirling,

$$\begin{aligned} B_{n_\epsilon}(\epsilon) &\sim \sqrt{2\pi n_\epsilon} \left(\frac{n_\epsilon}{eN} \right)^{n_\epsilon} \\ &= \sqrt{2\pi n_\epsilon} \exp \left(n_\epsilon \log \frac{n_\epsilon}{N} - n_\epsilon \right). \end{aligned}$$

Or

$$\log \frac{n_\epsilon}{N} = \log \left(1 + \frac{\delta}{N} \right) = \frac{\delta}{N} + O(N^{-2}),$$

donc

$$n_\epsilon \log \frac{n_\epsilon}{N} - n_\epsilon = -N + O(N^{-1}).$$

Ainsi,

$$B_{n_\epsilon}(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon}} e^{-1/\epsilon}.$$

La meilleure borne est donc de l'ordre de $\epsilon^{-1/2} e^{-1/\epsilon}$.

8. À $\epsilon > 0$ fixé, $B_n(\epsilon) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et les sommes partielles ne convergent pas.

En revanche, pour ϵ petit, une troncature autour de $n = 1/\epsilon$ donne une erreur majorée par une quantité extrêmement petite, de taille

$$\epsilon^{-1/2} e^{-1/\epsilon}.$$

La borne d'erreur diminue jusqu'à cet ordre, puis augmente.

Il faut distinguer $\epsilon \rightarrow 0^+$ à ordre fixé, qui donne un développement asymptotique valable, et $n \rightarrow +\infty$ à $\epsilon > 0$ fixé, qui donne une série divergente.

Nombres complexes

Séries de Fourier
