
TD - Fondements Mathématiques



Fillère Mathématiques Appliquées & Modélisation
3^{ième} année

Enseignant: Denis Périce
Bâtiment Braconnier - bureau 229
perice@math.univ-lyon1.fr

Contents

I - Fonctions réelles à une variable	2
II - Nombres complexes	7
III - Séries de Fourier	8

Semestre d'automne 2026.

Fonctions réelles à une variable

Problème I.1 : Dessiner un graphe

On étudie la fonction réelle

$$f(x) := x^2 + \frac{1}{x}.$$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Résoudre $f(x) \geq 0$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Quelles sont les asymptotes verticales et horizontales de f ?

4. Montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^2, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

5. Calculer f' et dresser le tableau de variation de f . Montrer que f possède un unique extremum local et préciser sa nature ainsi que ses coordonnées.
6. Trouver les points d'inflexions de f .
7. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
8. Esquisser le graphe de f en représentant les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Problème I.2 : Théorèmes de Taylor

L'objectif de ce problème est de retrouver progressivement les différentes formules de Taylor à partir du théorème fondamental de l'analyse.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^4(I)$. Dans un premier temps, on fixe $x \in I$ tel que $x > a$.

Formule de Taylor avec reste intégral

1. Rappeler le théorème fondamental de l'analyse. En particulier, montrer que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t_1) dt_1.$$

2. En appliquant la question précédente à f' , montrer que

$$f'(t_1) = f'(a) + \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2.$$

En déduire que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2 dt_1.$$

3. En itérant, montrer que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} f'''(t_3) dt_3 dt_2 dt_1.$$

4. Montrer, en inversant l'ordre d'intégration, que pour toute fonction continue g ,

$$\int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} g(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 = \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 g(t) dt.$$

5. En déduire la **formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt.$$

On notera dans la suite

$$R_2(x) := f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \right).$$

Formule de Taylor–Lagrange

6. Puisque f''' est continue sur $[a, x]$, on pose

$$m := \min_{t \in [a, x]} f'''(t),$$

$$M := \max_{t \in [a, x]} f'''(t).$$

Montrer que

$$\frac{m}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt \leq R_2(x) \leq \frac{M}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt.$$

7. En déduire que

$$m \frac{(x-a)^3}{3!} \leq R_2(x) \leq M \frac{(x-a)^3}{3!}.$$

8. Montrer qu'il existe $c \in [a, x]$ tel que

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3.$$

9. En déduire la **formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3.$$

10. En déduire l'**inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre 2** :

$$\left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \right| \leq \sup_{t \in [a, x]} |f'''(t)| \frac{|x-a|^3}{3!}.$$

Formule de Taylor-Young

11. Montrer que f''' est bornée dans un voisinage de a . En utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^2} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

12. En déduire la **formule de Taylor–Young à l’ordre 2** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2).$$

13. Expliquer pourquoi les mêmes résultats restent valables pour $x < a$.

(Bonus) Généralisation à l’ordre n

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et supposons $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$.

14. Démontrer la **formule de Taylor avec reste intégral à l’ordre n** :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

15. Montrer qu’il existe un réel $c \in [a, x]$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Cette formule est appelée **formule de Taylor–Lagrange à l’ordre n** .

16. En déduire l’**inégalité de Taylor–Lagrange à l’ordre n** .

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \right| \leq \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

17. En déduire que la fonction exponentielle est analytique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

18. En déduire enfin la **formule de Taylor–Young à l’ordre n** :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Problème I.3 : Développements limités

1. Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l’ordre 3 en 0 :

$$e^x, \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \ln(1 + x).$$

2. Faire de même pour

$$e^x \cos(x), \quad \ln(1 + \sin(x)).$$

3. Soit $P_2(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 0.1]$,

$$|e^x - P_2(x)| \leq \frac{e^{0.1}}{3!} x^3.$$

4. En utilisant $e^{0.1} < 2$, montrer que

$$|e^{0.1} - 1.105| < \frac{2}{6} \times 10^{-3}.$$

5. Montrer qu'un développement limité de e^x à l'ordre n en 0 permet d'obtenir une approximation de $e^{0.1}$ à 10^{-n} près ?

Problème I.4 : Résolution asymptotique d'une équation

Pour $\epsilon > 0$, on considère l'équation

$$x + \ln(1 + x) = \epsilon.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution $x_\epsilon > 0$ et que

$$x_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

2. À l'aide du développement limité de $\ln(1 + x)$, montrer que

$$\epsilon = 2x_\epsilon - \frac{x_\epsilon^2}{2} + \frac{x_\epsilon^3}{3} + o(x_\epsilon^3).$$

3. Chercher x_ϵ sous la forme

$$x_\epsilon = a\epsilon + b\epsilon^2 + c\epsilon^3 + o(\epsilon^3),$$

et déterminer a , b et c .

4. En déduire un développement limité de x_ϵ à l'ordre 3 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Problème I.5 : Approximation d'une intégrale

Pour $\epsilon > 0$, on pose

$$I(\epsilon) := \int_0^\epsilon \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

1. Calculer le développement limité de

$$\frac{\sin(x)}{x}$$

à l'ordre 4 en 0.

2. En intégrant ce développement, montrer que

$$I(\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} + \frac{\epsilon^5}{600} + o(\epsilon^5).$$

3. En utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange pour $\sin(x)$, donner une borne sur l'erreur commise en approchant $I(\epsilon)$ par

$$\epsilon - \frac{\epsilon^3}{18}.$$

Problème I.6 : (Bonus) Une série asymptotique divergente : la série d'Euler

Pour $\epsilon > 0$, on définit

$$f(\epsilon) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt.$$

1. Montrer que, pour tout $u \geq 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n-1} (-u)^k + \frac{(-u)^n}{1+u}.$$

2. En déduire que

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + R_n(\epsilon), \quad \text{où} \quad R_n(\epsilon) := (-\epsilon)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt.$$

On pourra utiliser

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!.$$

3. Montrer que $|R_n(\epsilon)| \leq n! \epsilon^n$. En déduire que, pour tout n fixé,

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + O(\epsilon^n).$$

4. Montrer que la série suivante diverge pour tout $\epsilon \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! (-\epsilon)^k.$$

5. Pour $0 < \epsilon < 1$ fixé, on pose $B_n(\epsilon) := n! \epsilon^n$. Montrer que

$$\frac{B_{n+1}(\epsilon)}{B_n(\epsilon)} = (n+1)\epsilon.$$

En déduire que $B_n(\epsilon)$ décroît tant que

$$(n+1)\epsilon < 1,$$

et croît dès que

$$(n+1)\epsilon > 1.$$

6. En déduire que la meilleure borne obtenue à la question 3 est atteinte pour un entier n_ϵ tel que

$$n_\epsilon \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\epsilon}.$$

7. En utilisant la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

montrer que la borne sur l'erreur est de l'ordre de

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-1/\epsilon}.$$

8. Comparer ce résultat avec ce que l'on obtiendrait en faisant tendre n vers $+\infty$ à $\epsilon > 0$ fixé. Expliquer pourquoi, bien que la série soit divergente, ses premières sommes partielles donnent d'excellentes approximations lorsque ϵ est petit.

Nombres complexes

Séries de Fourier
