
Test de positionnement

Fondements Mathématiques

Corrigé

45 minutes



Fillère Mathématiques Appliquées & Modélisation
3^{ième} année

Enseignant: [Denis Périce](#)
Bâtiment Braconnier - bureau 229
perice@math.univ-lyon1.fr

03/09/2026.

Problème : Dessiner un graphe de fonction

On étudie

$$f(x) = \frac{x+1}{x}e^x = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^x.$$

1. L'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, et le dénominateur doit être non nul. Ainsi,

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Puisque $e^x > 0$, le signe de $f(x)$ est celui de $(x+1)/x$. Ce quotient est positif sur $] -\infty, -1[$ et $]0, +\infty[$, nul en -1 et négatif sur $] -1, 0[$. Par conséquent,

$$\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \geq 0\} =] -\infty, -1] \cup]0, +\infty[.$$

3. Comme $1 + 1/x \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus, $xf(x) = (x+1)e^x \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

La droite $x = 0$ est l'unique asymptote verticale. La droite $y = 0$ est une asymptote horizontale en $-\infty$. Il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

4. Par dérivation,

$$f'(x) = e^x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}e^x.$$

Le signe de f' est donc celui du trinôme $x^2 + x - 1$, dont les racines sont

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On a $\alpha < 0 < \beta$; le trinôme est positif à l'extérieur de $[\alpha, \beta]$ et négatif à l'intérieur.

Pour $r \in \{\alpha, \beta\}$, l'identité $r^2 + r = 1$ donne

$$f(r) = \frac{e^r}{r^2}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	α	0^-	0^+	β	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^\alpha}{\alpha^2}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^\beta}{\beta^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction admet un unique maximum local en α et un unique minimum local en β :

$$\begin{aligned} \alpha &\simeq -1,6180, & f(\alpha) &\simeq 0,07574, \\ \beta &\simeq 0,6180, & f(\beta) &\simeq 4,85718. \end{aligned}$$

Elle n'admet aucun extremum global sur $\mathcal{D}_f$, car elle n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement.

5. Une nouvelle dérivation donne

$$f''(x) = e^x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right).$$

Si x_c est un point critique, alors $f'(x_c) = 0$, donc

$$1 + \frac{1}{x_c} - \frac{1}{x_c^2} = 0.$$

En remplaçant dans l'expression de f'' , on obtient

$$f''(x_c) = e^{x_c} \left(-\frac{1}{x_c^2} + \frac{2}{x_c^3} \right) = \boxed{\frac{2 - x_c}{x_c^3} e^{x_c}}.$$

6. L'abscisse de l'unique maximum local est

$$x_0 = \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0.$$

Comme $2 - x_0 > 0$, $x_0^3 < 0$ et $e^{x_0} > 0$, la formule précédente donne

$$\boxed{f''(x_0) < 0.}$$

7. Pour tout $x \neq 0$,

$$e^{-x} f''(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

Les trois derniers termes tendent vers 0 en $-\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} f''(x) = 1.}$$

8. La question précédente montre que $f''(x) > 0$ pour x suffisamment négatif, tandis que $f''(\alpha) < 0$. Par continuité, f'' s'annule donc entre ces deux régions.

Pour vérifier qu'il y a bien un changement de convexité, écrivons

$$f''(x) = \frac{e^x}{x^3} p(x), \quad p(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2.$$

Sur $] -\infty, \alpha]$, on a

$$p'(x) = 3x^2 + 2x - 2 > 0.$$

En effet, $\alpha < -3/2$ et ce trinôme est positif sur $] -\infty, -3/2]$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \quad p(\alpha) = 2 - \alpha > 0.$$

Il existe donc un unique $\xi \in] -\infty, \alpha[$ tel que $p(\xi) = 0$. Le polynôme est négatif avant ξ et positif entre ξ et α . Comme $x^3 < 0$ sur cet intervalle,

$$f''(x) > 0 \quad \text{si } x < \xi, \quad f''(x) < 0 \quad \text{si } \xi < x \leq \alpha.$$

La courbe passe donc de convexe à concave en

$$\boxed{I = (\xi, f(\xi))}.$$

Numériquement,

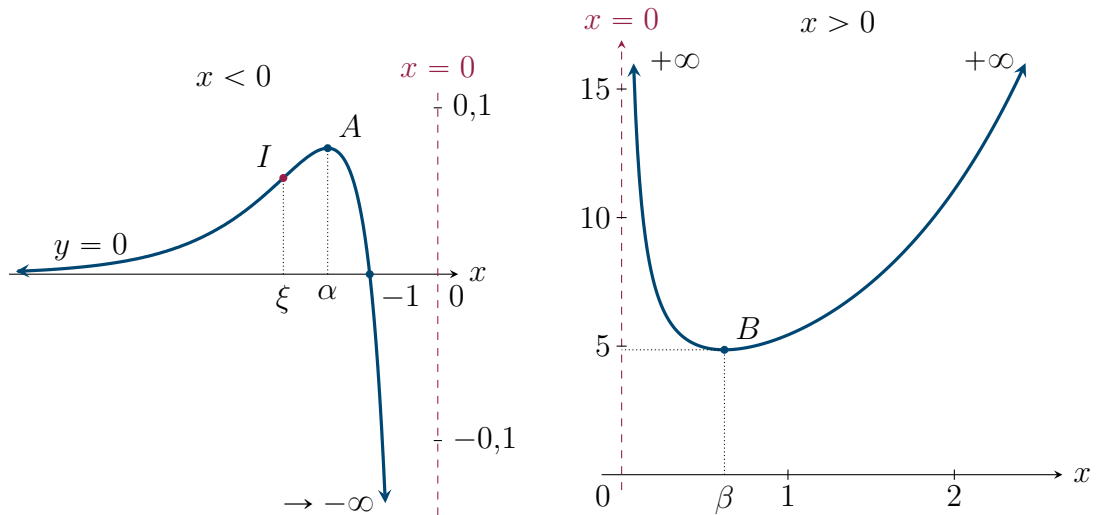
$$\xi \simeq -2,26953, \quad f(\xi) \simeq 0,05782.$$

9. On note

$$A = (\alpha, f(\alpha)), \quad B = (\beta, f(\beta)), \quad I = (\xi, f(\xi)).$$

La branche gauche tend vers l'asymptote $y = 0$ en $-\infty$, passe par le point d'inflexion I , atteint son maximum local en A , coupe l'axe des abscisses en $(-1, 0)$, puis tend vers $-\infty$ en 0^- . La branche droite part de $+\infty$ en 0^+ , atteint son minimum en B , puis tend vers $+\infty$.

Les deux branches sont représentées ci-dessous avec des échelles verticales différentes.



Questions à choix multiple

Question	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse	B	E	D	D	B	E	C	F

Question 1. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$?

Réponse B. Le développement limité

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donne

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1).$$

La limite vaut donc $\boxed{\frac{1}{2}}$.

Question 2. Quel est le développement limité de $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0 ?

Réponse E. On utilise

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3).$$

Comme $(\sin x)^2 = x^2 + o(x^3)$ et $(\sin x)^3 = x^3 + o(x^3)$, on obtient

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}.$$

Les termes d'ordre 3 se compensent.

Question 3. Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = -16$?

Réponse D. En écrivant $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, on obtient

$$r^4 = 16, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $r = 2$ et les quatre solutions distinctes sont

$$\boxed{\{2e^{i(\pi/4+k\pi/2)} \mid k \in \{0, 1, 2, 3\}\}}.$$

Question 4. Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - iz - 1 - i = 0$?

Réponse D. Le discriminant vaut

$$\Delta = (-i)^2 - 4(-1 - i) = 3 + 4i = (2 + i)^2.$$

Les solutions sont donc

$$z_1 = \frac{i + (2 + i)}{2} = 1 + i, \quad z_2 = \frac{i - (2 + i)}{2} = -1.$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\{1 + i, -1\}}$.

Question 5. Que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$?

Réponse B. Pour $z = \pi/2 + i \ln 2$, on a

$$e^{iz} = e^{i\pi/2 - \ln 2} = \frac{i}{2}, \quad e^{-iz} = e^{-i\pi/2 + \ln 2} = -2i.$$

Par définition du cosinus complexe,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{i/2 - 2i}{2} = \boxed{-\frac{3i}{4}}.$$

Question 6. Calculer, pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, le coefficient de Fourier complexe $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx$.

Réponse E. Une intégration par parties donne

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx.$$

La dernière intégrale est nulle, car n est un entier non nul. Comme $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, on obtient

$$c_n = \frac{2\pi(-1)^n}{-2\pi in} = \boxed{\frac{i(-1)^n}{n}}.$$

Question 7. Quelle valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ obtient-on par Parseval ?

Réponse C. La fonction $x \mapsto x$ est impaire sur $[-\pi, \pi]$, donc $c_0 = 0$. Pour $n \neq 0$, la question précédente donne $|c_n|^2 = 1/n^2$. L'identité de Parseval s'écrit alors

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

Question 8. Vers quelle valeur converge en 0 la série de Fourier de la fonction 2π -périodique égale à 1 sur $]0, \pi[$ et à -1 sur $] -\pi, 0[$?

Réponse F. La fonction est C^1 par morceaux et vérifie

$$g(0^-) = -1, \quad g(0^+) = 1.$$

Le théorème de Dirichlet donne donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N g(0) = \frac{g(0^-) + g(0^+)}{2} = \boxed{0}.$$

Cette limite est indépendante de la valeur attribuée à $g(0)$.