
TD - Fondements Mathématiques

Corrigé



Fillère Mathématiques Appliquées & Modélisation
3^{ième} année

Enseignant: Denis Périce
Bâtiment Braconnier - bureau 229
perice@math.univ-lyon1.fr

Contents

I - Fonctions réelles à une variable	2
II - Nombres complexes	12
III - Séries de Fourier	17

Semestre d'automne 2026.

Fonctions réelles à une variable

Problème I.1 : Dessiner un graphe

On considère

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

1. Le domaine de définition est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. On factorise :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x}.$$

Comme

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

le signe de $f(x)$ est celui de $(x+1)/x$. Ainsi,

$$f(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[.$$

3. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

4. On a

$$\frac{f(x)}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1, \quad \frac{f(x)}{1/x} = 1 + x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^2, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

5. La dérivée est

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$

Posons $\alpha = 2^{-1/3}$. Le dénominateur étant positif, f' est négative pour $x < \alpha$, hors 0, et positive pour $x > \alpha$.

Intervalle	$] -\infty, 0[$	$]0, \alpha[$	$[\alpha, +\infty[$
Signe de f'	-	-	+
Variation de f	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow \frac{3}{2^{2/3}}$	$\frac{3}{2^{2/3}} \nearrow +\infty$

Puisque $1/\alpha = 2\alpha^2$, on a

$$f(\alpha) = 3\alpha^2 = \frac{3}{2^{2/3}}.$$

L'unique extremum local est donc un minimum local :

$$M = \left(2^{-1/3}, \frac{3}{2^{2/3}}\right).$$

Ce n'est pas un minimum global sur $\mathcal{D}_f$, car f n'est pas minorée.

6. On calcule

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^3}.$$

Cette dérivée seconde s'annule et change de signe en -1 . L'unique point d'inflexion est donc

$$A = (-1, 0).$$

Le point 0 est exclu du domaine.

7. Le signe de f'' donne

x	$] -\infty, -1[$	$] -1, 0[$	$] 0, +\infty[$
$f''(x)$	+	-	+
f	convexe	concave	convexe

8. La branche négative descend de $+\infty$ vers $-\infty$, en passant par A . La branche positive descend jusqu'à M , puis remonte vers $+\infty$.

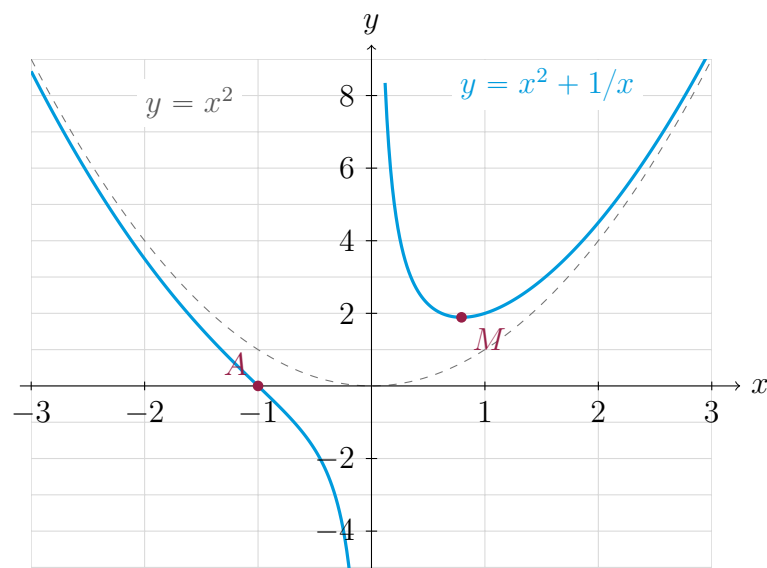
De plus,

$$f(x) - x^2 = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

La courbe se rapproche donc de la parabole $y = x^2$, par-dessous à gauche et par-dessus à droite.

La tangente en A a pour équation

$$y = f'(-1)(x + 1) = -3(x + 1).$$



Problème I.2 : Théorèmes de Taylor

On suppose $f \in \mathcal{C}^4(I)$, $a \in I$ et, dans un premier temps, $x > a$.

Formule de Taylor avec reste intégral

1. Le théorème fondamental de l'analyse affirme que, pour g continue, la fonction

$$G(y) = \int_a^y g(t) dt$$

est dérivable et vérifie $G' = g$. En particulier,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t_1) dt_1.$$

2. En appliquant ce résultat à f' ,

$$f'(t_1) = f'(a) + \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2.$$

Par substitution,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2 dt_1.$$

3. De même,

$$f''(t_2) = f''(a) + \int_a^{t_2} f'''(t_3) dt_3.$$

Comme

$$\int_a^x \int_a^{t_1} 1 dt_2 dt_1 = \int_a^x (t_1 - a) dt_1 = \frac{(x-a)^2}{2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \\ &\quad + \int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} f'''(t_3) dt_3 dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

4. Le domaine d'intégration est

$$a \leq t_3 \leq t_2 \leq t_1 \leq x.$$

En posant $t = t_3$ et en inversant l'ordre,

$$\begin{aligned} &\int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} g(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \\ &= \int_a^x g(t) \int_t^x \int_{t_2}^x 1 dt_1 dt_2 dt \\ &= \int_a^x g(t) \int_t^x (x - t_2) dt_2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x - t)^2 g(t) dt. \end{aligned}$$

5. En prenant $g = f'''$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt.$$

Ainsi,

$$R_2(x) = \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt.$$

Formule de Taylor–Lagrange

6. La continuité de f''' sur le segment compact $[a, x]$ assure l'existence de son minimum m et de son maximum M . Comme $(x-t)^2 \geq 0$,

$$\frac{m}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt \leq R_2(x) \leq \frac{M}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt.$$

7. L'intégrale vaut $(x-a)^3/3$, donc

$$m \frac{(x-a)^3}{3!} \leq R_2(x) \leq M \frac{(x-a)^3}{3!}.$$

8. Puisque $x > a$,

$$m \leq \frac{3!R_2(x)}{(x-a)^3} \leq M.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, x]$ tel que

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3.$$

9. On en déduit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3.$$

10. En prenant les valeurs absolues,

$$\left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \right| \leq \sup_{t \in [a, x]} |f'''(t)| \frac{|x-a|^3}{3!}.$$

Formule de Taylor–Young

11. Choisissons $\delta > 0$ tel que $[a-\delta, a+\delta] \subset I$. Par continuité, il existe $K \geq 0$ tel que $|f'''| \leq K$ sur ce segment.

Taylor–Lagrange, également valable à gauche de a comme justifié à la question 13, donne

$$\left| \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} \right| \leq \frac{K}{6} |x-a| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

12. Ainsi $R_2(x) = o((x-a)^2)$, et

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

13. Posons $h = x - a$ et $F(s) = f(a + sh)$. En appliquant la formule déjà démontrée à F entre 0 et 1, on obtient

$$R_2(x) = \frac{h^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 f'''(a+sh) ds.$$

Le poids $(1-s)^2$ est positif quel que soit le signe de h . Les arguments de moyenne pondérée et de majoration restent donc valables pour $x < a$, avec $c \in [x, a]$.

Le changement de variable $t = a + sh$ redonne le reste intégral avec l'intégrale orientée de a à x .

(Bonus) Généralisation à l'ordre n

On suppose $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et on pose

$$J = [\min(a, x), \max(a, x)].$$

14. Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental.

Supposons la formule connue à l'ordre $n - 1$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\ = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

On utilise ici

$$u = f^{(n)}(t), \quad v = -\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

La récurrence donne donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

15. Par le changement de variable $t = a + s(x-a)$,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(x-a)) ds.$$

La continuité et la positivité du poids donnent un $c \in J$ tel que l'intégrale vaut

$$f^{(n+1)}(c) \int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}.$$

Ainsi,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

16. En prenant les valeurs absolues,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \sup_{t \in J} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

17. Pour l'exponentielle et $a = 0$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{\max(0,x)} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

À x fixé, le membre de droite tend vers 0, car le rapport des termes successifs de $|x|^{n+1}/(n+1)!$ vaut $|x|/(n+2) \rightarrow 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Autour de tout $a \in \mathbb{R}$,

$$e^x = e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^k}{k!},$$

ce qui établit l'analyticité sur $\mathbb{R}$.

18. La fonction $f^{(n+1)}$ étant localement bornée,

$$R_n(x) = O(|x - a|^{n+1}) = o((x - a)^n).$$

Finalement,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Problème I.3 : Développements limités

Tous les développements suivants sont pris lorsque $x \rightarrow 0$.

1. Les formules de Taylor donnent

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \\ \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

2. Par multiplication,

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Pour la composition, posons $u = \sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$. Comme $u^2 = x^2 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$,

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin x) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

3. Pour $x \in [0, 0.1]$, Taylor-Lagrange donne

$$|e^x - P_2(x)| \leq \sup_{t \in [0, x]} e^t \frac{x^3}{3!} \leq \frac{e^{0.1}}{3!} x^3.$$

4. Puisque $P_2(0.1) = 1.105$ et $e^{0.1} < 2$,

$$|e^{0.1} - 1.105| < \frac{2}{6} \times 10^{-3}.$$

5. Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k/k!$. L'inégalité de Taylor–Lagrange donne

$$\begin{aligned} |e^{0.1} - P_n(0.1)| &\leq \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} 10^{-(n+1)} \\ &< \frac{0.2}{(n+1)!} 10^{-n} < 10^{-n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P_n(0.1)$ approche $e^{0.1}$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-n} .

Cette précision numérique repose sur la borne de Taylor–Lagrange ; la seule notation $o(x^n)$ ne fournit pas de borne explicite en 0.1.

Problème I.4 : Résolution asymptotique d'une équation

On pose

$$g(x) = x + \ln(1+x), \quad x \in]-1, +\infty[.$$

1. La fonction g est continue et

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0.$$

Elle est strictement croissante, avec

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

L'équation $g(x) = \epsilon$ admet donc une unique solution.

Comme $g(0) = 0 < \epsilon$, cette solution x_ϵ est positive. L'équation et $\ln(1+x_\epsilon) > 0$ donnent

$$0 < x_\epsilon < \epsilon.$$

Par encadrement,

$$\boxed{x_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0.}$$

2. Le développement du logarithme en x_ϵ donne

$$\boxed{\epsilon = 2x_\epsilon - \frac{x_\epsilon^2}{2} + \frac{x_\epsilon^3}{3} + o(x_\epsilon^3).}$$

3. Cherchons

$$x_\epsilon = a\epsilon + b\epsilon^2 + c\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

Alors

$$x_\epsilon^2 = a^2\epsilon^2 + 2ab\epsilon^3 + o(\epsilon^3), \quad x_\epsilon^3 = a^3\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

En substituant,

$$\epsilon = 2a\epsilon + \left(2b - \frac{a^2}{2}\right)\epsilon^2 + \left(2c - ab + \frac{a^3}{3}\right)\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

L'identification donne

$$2a = 1, \quad 2b - \frac{a^2}{2} = 0, \quad 2c - ab + \frac{a^3}{3} = 0.$$

D'où

$$\boxed{a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{16}, \quad c = -\frac{1}{192}.}$$

4. Pour justifier le développement, posons

$$p(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{16} - \frac{\epsilon^3}{192}.$$

Les calculs précédents donnent $g(p(\epsilon)) = \epsilon + o(\epsilon^3)$. Comme $g' \geq 1$, le théorème des accroissements finis implique, pour ϵ assez petit,

$$|x_\epsilon - p(\epsilon)| \leq |g(x_\epsilon) - g(p(\epsilon))| = o(\epsilon^3).$$

Ainsi,

$$x_\epsilon = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{16} - \frac{\epsilon^3}{192} + o(\epsilon^3).$$

Problème I.5 : Approximation d'une intégrale

La fonction $\sin x/x$ se prolonge continûment en 0 par la valeur 1.

1. Le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

donne, après division par x ,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

2. En intégrant terme à terme,

$$I(\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} + \frac{\epsilon^5}{600} + o(\epsilon^5).$$

Pour justifier le reste, si $r(x) = o(x^4)$, alors pour tout $\eta > 0$, $|r(x)| \leq \eta x^4$ près de 0. Ainsi, pour ϵ assez petit,

$$\left| \int_0^\epsilon r(x) dx \right| \leq \eta \int_0^\epsilon x^4 dx = \frac{\eta}{5} \epsilon^5.$$

Le reste intégré est donc $o(\epsilon^5)$.

3. Le polynôme de Taylor du sinus à l'ordre 4 est $x - x^3/6$. Comme $|\sin^{(5)}(t)| = |\cos t| \leq 1$,

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^5}{120} \quad (x \geq 0).$$

Après division par $x > 0$ et intégration,

$$\begin{aligned} \left| I(\epsilon) - \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} \right) \right| &\leq \int_0^\epsilon \left| \frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} \right| dx \\ &\leq \int_0^\epsilon \frac{x^4}{120} dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| I(\epsilon) - \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} \right) \right| \leq \frac{\epsilon^5}{600}.$$

Problème I.6 : (Bonus) Une série asymptotique divergente : la série d'Euler

L'intégrale définissant $f(\epsilon)$ converge pour $\epsilon > 0$, car

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} \leq e^{-t}.$$

1. La somme géométrique finie vérifie

$$(1 + u) \sum_{k=0}^{n-1} (-u)^k = 1 - (-u)^n.$$

En divisant par $1 + u$,

$$\frac{1}{1 + u} = \sum_{k=0}^{n-1} (-u)^k + \frac{(-u)^n}{1 + u}.$$

2. On prend $u = \epsilon t$, puis on intègre la somme finie contre e^{-t} . En utilisant

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!,$$

on obtient

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + R_n(\epsilon),$$

où

$$R_n(\epsilon) = (-\epsilon)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt.$$

3. Comme $1 + \epsilon t \geq 1$,

$$|R_n(\epsilon)| \leq \epsilon^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n! \epsilon^n.$$

Ainsi, pour chaque n fixé,

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + O(\epsilon^n) \quad (\epsilon \rightarrow 0^+).$$

4. Pour $\epsilon \neq 0$,

$$\frac{(k+1)! |\epsilon|^{k+1}}{k! |\epsilon|^k} = (k+1) |\epsilon| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Les termes ne tendent pas vers 0. La série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! (-\epsilon)^k$$

diverge donc pour tout $\epsilon \neq 0$.

5. On a

$$\frac{B_{n+1}(\epsilon)}{B_n(\epsilon)} = (n+1)\epsilon.$$

La suite décroît lorsque $(n+1)\epsilon < 1$, croît lorsque $(n+1)\epsilon > 1$, et deux termes successifs sont égaux lorsque $(n+1)\epsilon = 1$.

6. Si $1/\epsilon$ n'est pas entier, le minimum est atteint en $n_\epsilon = \lfloor 1/\epsilon \rfloor$. Si $1/\epsilon = m$ est entier, les indices $m - 1$ et m donnent le même minimum.

On peut toujours choisir

$$n_\epsilon = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\epsilon}.$$

7. Posons $N = 1/\epsilon$ et $n_\epsilon = N + \delta$, avec δ borné. Par Stirling,

$$\begin{aligned} B_{n_\epsilon}(\epsilon) &\sim \sqrt{2\pi n_\epsilon} \left(\frac{n_\epsilon}{eN} \right)^{n_\epsilon} \\ &= \sqrt{2\pi n_\epsilon} \exp \left(n_\epsilon \log \frac{n_\epsilon}{N} - n_\epsilon \right). \end{aligned}$$

Or

$$\log \frac{n_\epsilon}{N} = \log \left(1 + \frac{\delta}{N} \right) = \frac{\delta}{N} + O(N^{-2}),$$

donc

$$n_\epsilon \log \frac{n_\epsilon}{N} - n_\epsilon = -N + O(N^{-1}).$$

Ainsi,

$$B_{n_\epsilon}(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon}} e^{-1/\epsilon}.$$

La meilleure borne est donc de l'ordre de $\epsilon^{-1/2} e^{-1/\epsilon}$.

8. À $\epsilon > 0$ fixé, $B_n(\epsilon) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et les sommes partielles ne convergent pas.

En revanche, pour ϵ petit, une troncature autour de $n = 1/\epsilon$ donne une erreur majorée par une quantité extrêmement petite, de taille

$$\epsilon^{-1/2} e^{-1/\epsilon}.$$

La borne d'erreur diminue jusqu'à cet ordre, puis augmente.

Il faut distinguer $\epsilon \rightarrow 0^+$ à ordre fixé, qui donne un développement asymptotique valable, et $n \rightarrow +\infty$ à $\epsilon > 0$ fixé, qui donne une série divergente.

Nombres complexes

Problème II.1 : Forme polaire et géométrie

1. Pour $z_1 = 1 + i$,

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi},$$

donc

$$\boxed{1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

De même, pour $z_2 = -\sqrt{3} + i$,

$$|z_2| = 2, \quad \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi},$$

d'où

$$\boxed{-\sqrt{3} + i = 2e^{5i\pi/6}.$$

2. Si $z = re^{i\varphi}$, alors

$$e^{i\theta} z = re^{i(\varphi+\theta)}.$$

Le module est inchangé et l'argument augmente de θ : il s'agit donc d'une rotation d'angle θ autour de l'origine.

Comme

$$\begin{aligned} \sqrt{2} e^{7i\pi/12} (1 + i) &= \sqrt{2} e^{7i\pi/12} \sqrt{2} e^{i\pi/4} \\ &= 2e^{i(7\pi/12+3\pi/12)} = 2e^{5i\pi/6} \\ &= -\sqrt{3} + i, \end{aligned}$$

la rotation d'angle $7\pi/12$, suivie d'une dilatation de facteur $\sqrt{2}$, transforme bien $1 + i$ en $-\sqrt{3} + i$.

Problème II.2 : Racines carrées et équations du second degré

1. Posons $z = x + iy$. L'équation $z^2 = 3 + 4i$ donne

$$x^2 - y^2 = 3, \quad 2xy = 4.$$

De plus,

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |3 + 4i| = 5.$$

En additionnant les deux équations portant sur x^2 et y^2 ,

$$2x^2 = 8,$$

donc $x = \pm 2$. Comme $xy = 2$, on obtient respectivement $y = 1$ et $y = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{3 + 4i} = \pm(2 + i).$$

2. Le discriminant est

$$\Delta = (-3)^2 - 4(3 + i) = -3 - 4i.$$

Or

$$(1 - 2i)^2 = -3 - 4i,$$

donc une racine carrée de Δ est $1 - 2i$. Les deux racines sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i, \\ z_2 &= \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$z^2 - 3z + (3 + i) = (z - (2 - i))(z - (1 + i)).$$

Problème II.3 : Racines n -ièmes

1. Écrivons $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \geq 0$. Alors

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}.$$

L'égalité $z^n = re^{i\theta}$ équivaut à

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient donc

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}.$$

Les valeurs $k = 0, \dots, n - 1$ donnent n solutions distinctes, et les autres valeurs de k les reproduisent. Ainsi,

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

2. Comme

$$-8 = 8e^{i\pi},$$

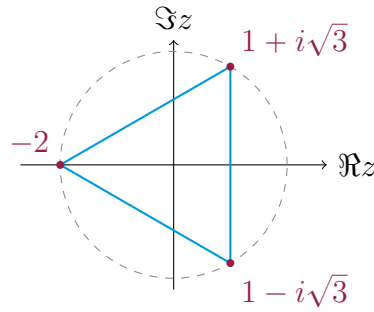
les solutions de $z^3 = -8$ sont

$$z_k = 2e^{i(\pi + 2k\pi)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

On trouve

$$z_0 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Ces trois points ont module 2 et leurs arguments sont espacés de $2\pi/3$: ils forment un triangle équilatéral centré en l'origine.



3. Pour $z^n = 1$, on prend $r = 1$ et $\theta = 0$. Les solutions sont

$$\omega_k = e^{2ik\pi/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Elles ont toutes module 1 et deux solutions consécutives ont des arguments qui diffèrent de $2\pi/n$. Elles sont donc les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Problème II.4: Exponentielle, trigonométrie et logarithme complexes

1. Si $z = x + iy$, alors

$$\begin{aligned} e^{z+2i\pi} &= e^x (\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned}$$

Ainsi l'exponentielle n'est pas injective.

D'après les définitions du sinus et du cosinus complexes,

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \boxed{\cosh y}, \\ \sin(iy) &= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = \boxed{i \sinh y}. \end{aligned}$$

Comme $\cosh y \rightarrow +\infty$ et $|\sinh y| \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow +\infty$, les fonctions $\cos$ et $\sin$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

2. Écrivons $w = u + iv$. Alors

$$e^w = e^u e^{iv}.$$

L'égalité $e^w = r e^{i\theta}$ impose

$$e^u = r, \quad v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi

$$w = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, puisque $2i = 2e^{i\pi/2}$,

$$e^w = 2i \iff w = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Un logarithme complexe de $z \neq 0$ est donc une solution de $e^w = z$. Il en existe une infinité, qui diffèrent de multiples de $2i\pi$. Il n'existe en revanche aucun logarithme complexe de 0, puisque $e^w \neq 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.

3. Comme

$$-1 = e^{i\pi},$$

tous ses logarithmes complexes sont

$$w = i(\pi + 2k\pi) = i(2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Problème II.5 : Application : l'oscillateur harmonique

On considère

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega > 0.$$

1. Cherchons une solution complexe sous la forme

$$z(t) = e^{\lambda t}.$$

Comme $z''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, l'équation devient

$$(\lambda^2 + \omega^2)e^{\lambda t} = 0.$$

L'exponentielle ne s'annulant jamais,

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

donc

$$\lambda = \pm i\omega.$$

2. Les fonctions $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$ sont donc des solutions. L'équation étant linéaire, toute combinaison linéaire

$$z(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

est encore une solution.

3. Par la formule d'Euler,

$$z(t) = (a + b) \cos(\omega t) + i(a - b) \sin(\omega t).$$

Cette fonction est réelle pour tout t si et seulement si

$$b = \bar{a}.$$

En effet, si $a = \alpha + i\beta$, alors $b = \alpha - i\beta$ et

$$z(t) = 2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t).$$

Réciproquement, pour $A, B \in \mathbb{R}$, on peut choisir

$$a = \frac{A - iB}{2}, \quad b = \frac{A + iB}{2} = \bar{a}.$$

Les deux solutions $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$ étant linéairement indépendantes, elles engendrent l'espace des solutions complexes de cette équation différentielle d'ordre 2. Les solutions réelles sont donc exactement

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

4. On a

$$\begin{aligned}x(0) &= A, \\x'(0) &= \omega B.\end{aligned}$$

Les conditions initiales imposent donc

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Ainsi,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

5. **(Bonus)** En dérivant l'énergie,

$$\begin{aligned}E'(t) &= x'(t)x''(t) + \omega^2 x(t)x'(t) \\&= x'(t)(x''(t) + \omega^2 x(t)) = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E(t) = E(0) \quad \text{pour tout } t.$$

Séries de Fourier

Problème III.1 : Calcul de série

1. On pose

$$g(y) = f\left(a + \frac{T}{2\pi}y\right), \quad y \in [0, 2\pi].$$

Le changement de variables $x = a + Ty/(2\pi)$ donne

$$\int_0^{2\pi} |g(y)|^2 dy = \frac{2\pi}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

On peut donc appliquer à g la décomposition vue en cours :

$$g(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N d_n e^{iny}, \quad \text{dans } L^2(0, 2\pi),$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) e^{-iny} dy.$$

Le même changement de variables dans les coefficients donne

$$d_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) e^{-2i\pi n(x-a)/T} dx.$$

En revenant à la variable x , on obtient

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N d_n e^{2i\pi n(x-a)/T}, \quad \text{dans } L^2(a, a+T).$$

La convergence dans L^2 est conservée par ce changement de variables, qui multiplie le carré de la norme par $T/(2\pi)$.

De manière équivalente, en posant $c_n = d_n e^{-2i\pi na/T}$, on retrouve la forme usuelle :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) e^{-2i\pi nx/T} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi nx/T}, \quad \text{dans } L^2(a, a+T).$$

2. Par imparité, $c_0 = 0$. Pour $n \neq 0$, une intégration par parties donne

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{ix}{n} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx = \frac{i(-1)^n}{n},$$

car l'intégrale du dernier terme est nulle et $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$. Ainsi,

$$c_0 = 0, \quad c_n = \frac{i(-1)^n}{n} \quad (n \neq 0).$$

3. L'identité de Parseval donne

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Notons

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

les coefficients complexes de f . Pour $n \geq 1$, les formules d'Euler donnent

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) \sin(nx).$$

On pose donc

$$a_n = i(c_n - c_{-n}), \quad b_n = c_n + c_{-n} \quad (n \geq 1), \quad b_0 = 2c_0.$$

En regroupant les termes d'indices n et $-n$ dans les sommes partielles, on obtient

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)) \right], \quad \text{dans } L^2([0, 2\pi]).$$

Les expressions intégrales sont

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0.$$

Ces formules restent valables lorsque f est à valeurs complexes.

5. Par périodicité, on peut calculer les coefficients sur $[-\pi, \pi]$. Comme g est paire,

$$a_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Pour $n \geq 1$, deux intégrations par parties donnent

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

La série obtenue converge normalement, puisque $\sum_{n \geq 1} 4/n^2 < +\infty$, donc uniformément. Sa somme coïncide avec g dans L^2 ; les deux fonctions étant continues, elles sont égales en tout point. Ainsi,

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].}$$

6. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on applique la formule précédente en $x = \theta - \pi \in [-\pi, \pi]$. Comme

$$\cos(n(\theta - \pi)) = (-1)^n \cos(n\theta),$$

il vient

$$(\theta - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + \frac{\pi^2}{6}}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En particulier, pour $\theta = \pi/3$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2} = \frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{36}}.$$

Problème III.2 : Cordes vibrantes

On pose

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad w_n = ck_n, \quad n \geq 1.$$

1. Pour chaque $t \geq 0$, on considère $u(\cdot, t)$ dans $L^2(0, L)$ et son prolongement impair $\tilde{u}(\cdot, t)$, puis $2L$ -périodique. Par imparité, le coefficient constant et tous les coefficients en cosinus de $\tilde{u}$ sont nuls. Ses coefficients en sinus sont

$$a_n(t) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{u}(x, t) \sin(k_n x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin(k_n x) dx.$$

La convergence dans $L^2(-L, L)$ de la série de Fourier, puis la restriction à $]0, L[$, donnent (les coefficients en cosinus s'annulent par imparité)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(k_n x), \quad \text{dans } L^2(0, L).$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) \sin(k_n x), \\ \partial_x^2 u(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) k_n^2 \sin(k_n x). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de Fourier,

$$a_n''(t) + w_n^2 a_n(t) = 0.$$

Il existe donc des constantes A_n, B_n telles que

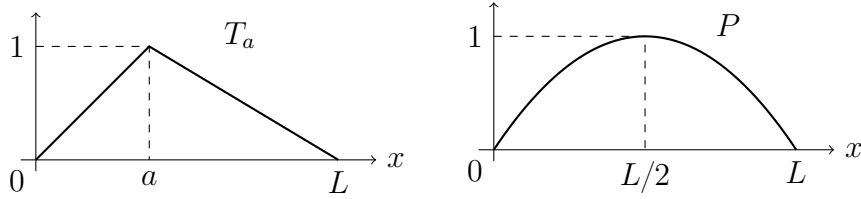
$$a_n(t) = A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t), \quad A_n = a_n(0), \quad B_n = \frac{a_n'(0)}{w_n}.$$

On obtient

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)) \sin(k_n x).$$

3. La courbe de T_a est formée des segments joignant $(0, 0)$ à $(a, 1)$, puis $(a, 1)$ à $(L, 0)$. La courbe de P est une parabole concave, nulle en 0 et L , de sommet $(L/2, 1)$:

$$P(x) = 1 - \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)^2.$$



Notons τ_n les coefficients en sinus de T_a . Alors

$$\tau_n = \frac{2}{L} \left[\frac{1}{a} \int_0^a x \sin(k_n x) dx + \frac{1}{L-a} \int_a^L (L-x) \sin(k_n x) dx \right].$$

Une intégration par parties dans chaque intégrale donne

$$\begin{aligned} \int_0^a x \sin(k_n x) dx &= -\frac{a \cos(k_n a)}{k_n} + \frac{\sin(k_n a)}{k_n^2}, \\ \int_a^L (L-x) \sin(k_n x) dx &= \frac{(L-a) \cos(k_n a)}{k_n} + \frac{\sin(k_n a)}{k_n^2}. \end{aligned}$$

Les termes en cosinus se compensent, d'où

$$\tau_n = \frac{2}{L k_n^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} \right) \sin(k_n a) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2}.$$

Notons p_n les coefficients en sinus de P . Deux intégrations par parties, utilisant $\sin(k_n L) = 0$, donnent

$$\int_0^L x(L-x) \sin(k_n x) dx = \frac{2}{k_n^2} \int_0^L \sin(k_n x) dx = \frac{2(1 - (-1)^n)}{k_n^3}.$$

Par conséquent,

$$p_n = \frac{8}{L^3} \int_0^L x(L-x) \sin(k_n x) dx = \frac{16}{\pi^3} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} T_a(x) &= \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2} \sin(k_n x), \\ P(x) &= \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin(k_n x). \end{aligned}$$

Les coefficients sont respectivement en $O(n^{-2})$ et $O(n^{-3})$, donc les deux séries convergent absolument et uniformément sur $[0, L]$. Leurs sommes sont continues et égales à T_a et P dans $L^2(0, L)$. Les égalités sont donc valables en tout point de $[0, L]$.

4. Pour des données initiales $u(\cdot, 0) = F$ et $\partial_t u(\cdot, 0) = G$, les coefficients vérifient

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin(k_n x) dx, \quad B_n = \frac{2}{Lw_n} \int_0^L G(x) \sin(k_n x) dx.$$

Pour la corde pincée, on a $A_n^g = \tau_n$ et $B_n^g = 0$, tandis que, pour la corde frappée,

$$A_n^p = 0, \quad B_n^p = \frac{p_n}{w_n} = \frac{16L}{c\pi^4} \frac{1 - (-1)^n}{n^4}.$$

Ainsi,

$$u_g(x, t) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2} \cos(w_n t) \sin(k_n x),$$

$$u_p(x, t) = \frac{16L}{c\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} \sin(w_n t) \sin(k_n x).$$

5. Pour la corde pincée, le mode n n'est pas excité si et seulement si

$$\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = 0 \iff \frac{na}{L} \in \mathbb{Z}.$$

Si $a/L = p/q$ est une fraction irréductible, avec $1 \leq p < q$, les modes absents sont exactement les multiples de q . Si a/L est irrationnel, tous les modes sont excités.

Pour la corde frappée, le coefficient du mode n est nul si et seulement si $1 - (-1)^n = 0$. Les modes pairs sont donc absents, et tous les modes impairs sont excités.

6. Lorsque $a = L/2$, on obtient

$$A_n^g = \frac{8}{\pi^2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}, \quad B_n^g = 0,$$

$$A_n^p = 0, \quad B_n^p = \frac{16L}{c\pi^4} \frac{1 - (-1)^n}{n^4}.$$

Les deux excitations ne contiennent que des modes impairs. Pour n impair,

$$M_n^g = \frac{8}{\pi^2 n^2}, \quad M_n^p = \frac{32L}{c\pi^4 n^4}.$$

Les amplitudes relatives sont donc

$$\frac{M_n^g}{M_1^g} = \begin{cases} n^{-2}, & n \text{ impair}, \\ 0, & n \text{ pair}, \end{cases} \quad \frac{M_n^p}{M_1^p} = \begin{cases} n^{-4}, & n \text{ impair}, \\ 0, & n \text{ pair}. \end{cases}$$

Les fréquences présentes sont identiques, mais les harmoniques élevées du déplacement sont plus atténuées pour l'excitation parabolique en vitesse. Dans ce modèle, le déplacement de la corde pincée est donc plus riche en harmoniques élevées. Cette comparaison porte sur le déplacement de la corde ; le son rayonné par un instrument réel dépend aussi de sa caisse de résonance et de son couplage avec l'air.

7. Le prolongement impair et $2L$ -périodique de T_a admet la série uniformément convergente

$$\tilde{T}_a(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sin(k_n y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Puisque $w_n = ck_n$, l'identité trigonométrique donne

$$\cos(w_n t) \sin(k_n x) = \frac{1}{2} [\sin(k_n(x - ct)) + \sin(k_n(x + ct))].$$

En sommant,

$$u_g(x, t) = \frac{1}{2} \tilde{T}_a(x - ct) + \frac{1}{2} \tilde{T}_a(x + ct).$$

Un point de profil d'abscisse initiale y se trouve en $x = y + ct$ dans le premier terme et en $x = y - ct$ dans le second. Le premier terme se propage donc vers la droite, le second vers la gauche, tous deux à la célérité c .

L'impairité donne $\tilde{T}_a(-ct) + \tilde{T}_a(ct) = 0$. L'impairité et la périodicité donnent également

$$\tilde{T}_a(L + ct) = \tilde{T}_a(-L + ct) = -\tilde{T}_a(L - ct).$$

La superposition respecte donc les deux extrémités fixes. La formule reste valable pour tout $a \in]0, L[$.

Problème III.3: (Bonus) Convergence ponctuelle et discontinuités

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $0 \leq a < b \leq \pi$,

$$\int_a^b e^{i\lambda t} dt = \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda}, \quad \left| \int_a^b e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{2}{|\lambda|}.$$

Pour une fonction en escalier $h = \sum_{j=1}^m z_j \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j[}$, on a donc

$$\left| \int_0^\pi h(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{j=1}^m |z_j| \longrightarrow 0.$$

Soient maintenant $g \in L^1(0, \pi)$ et $\epsilon > 0$. Par densité, on choisit une fonction en escalier h telle que $\|g - h\|_{L^1} < \epsilon$. Alors

$$\left| \int_0^\pi g(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \epsilon + \left| \int_0^\pi h(t) e^{i\lambda t} dt \right|.$$

La limite supérieure est au plus ϵ . Puisque ϵ est arbitraire, on obtient le lemme de Riemann-Lebesgue.

2. En regroupant les indices n et $-n$,

$$D_N(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nt),$$

donc D_N est réelle et paire. Pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la formule de la somme géométrique donne

$$D_N(t) = e^{-iNt} \frac{1 - e^{i(2N+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}.$$

Par ailleurs,

$$D_N(0) = 2N + 1.$$

L'intégrale de chaque exponentielle de fréquence non nulle sur $[-\pi, \pi]$ étant nulle, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1.$$

3. Par le changement de variables $s = x - t$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) e^{int} dt = \frac{e^{inx}}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) e^{-ins} ds = c_n e^{inx}.$$

La dernière égalité utilise la 2π -périodicité de $s \mapsto f(s)e^{-ins}$. En sommant de $-N$ à N , il vient

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.$$

4. On note $f'(x^-)$ et $f'(x^+)$ les limites latérales de la dérivée. Les hypothèses sur f permettent d'écrire, lorsque $t \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} f(x+t) &= f(x^+) + t f'(x^+) + o(t), \\ f(x-t) &= f(x^-) - t f'(x^-) + o(t). \end{aligned}$$

Comme $\sin(t/2) = t/2 + o(t)$, on en déduit

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g_x(t) = 2 (f'(x^+) - f'(x^-)).$$

Ainsi, g_x est bornée au voisinage de 0. Sur tout intervalle $[\delta, \pi]$, avec $\delta > 0$, son numérateur est borné et $\sin(t/2) \geq \sin(\delta/2) > 0$. La fonction g_x est donc intégrable sur $]0, \pi[$.

5. La parité de D_N donne

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_N(t) dt.$$

De plus, $\int_0^{\pi} D_N(t) dt = \pi$. En soustrayant la moyenne des limites latérales, on obtient

$$\begin{aligned} S_N f(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_x(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt. \end{aligned}$$

En écrivant

$$\sin(\lambda t) = \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i},$$

le lemme de Riemann–Lebesgue appliqué à g_x montre que le dernier membre tend vers 0. Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Si f est continue en x , cette limite vaut $f(x)$. En un point de discontinuité, elle ne dépend pas de la valeur attribuée à $f(x)$: changer une fonction en un point ne modifie ni ses coefficients de Fourier ni ses limites latérales.

Problème III.4 : (Bonus) Séries de Fourier à plusieurs dimensions

1. La condition $e_i \cdot e_j^* = \delta_{ij}$ s'écrit

$$E^T E_* = I_d.$$

Puisque E est inversible, elle détermine une unique matrice

$$E_* = (E^T)^{-1} = (E^{-1})^T.$$

Cette matrice est inversible : ses colonnes forment donc bien une base de $\mathbb{R}^d$.

2. Il suffit de tester la condition définissant Λ^* sur les vecteurs e_j . En effet, toutes les combinaisons entières de nombres appartenant à $2\pi\mathbb{Z}$ appartiennent encore à $2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi,

$$k \in \Lambda^* \iff E^T k \in 2\pi\mathbb{Z}^d.$$

Il existe donc $n \in \mathbb{Z}^d$ tel que

$$k = 2\pi(E^T)^{-1}n = 2\pi \sum_{j=1}^d n_j e_j^*.$$

D'où

$$\Lambda^* = \{k_n \mid n \in \mathbb{Z}^d\}, \quad k_n = 2\pi E_* n.$$

Enfin,

$$e^{ik \cdot (x+\lambda)} = e^{ik \cdot x} e^{ik \cdot \lambda}.$$

L'exponentielle est Λ -périodique si et seulement si $e^{ik \cdot \lambda} = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, c'est-à-dire si et seulement si $k \in \Lambda^*$.

3. Le changement de variables $x = Et$ envoie $[0, 1]^d$ sur Q , avec un jacobien constant égal à $|\det E|$. Par conséquent,

$$|Q| = |\det E|.$$

La dualité donne

$$k_n \cdot (Et) = 2\pi n \cdot t.$$

Pour $n, m \in \mathbb{Z}^d$, on en déduit

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle &= \frac{1}{|Q|} \int_Q e^{i(k_m - k_n) \cdot x} dx = \int_{[0,1]^d} e^{2i\pi(m-n) \cdot t} dt \\ &= \prod_{j=1}^d \int_0^1 e^{2i\pi(m_j - n_j)t_j} dt_j = \prod_{j=1}^d \delta_{n_j m_j} = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

La famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est donc orthonormale.

4. Par le changement de variables précédent, il suffit de démontrer la complétude de $(t \mapsto e^{2i\pi n \cdot t})_{n \in \mathbb{Z}^d}$ dans $L^2([0, 1]^d)$. On procède par récurrence sur d . Le cas $d = 1$ est la complétude des séries de Fourier à une dimension.

Supposons le résultat établi en dimension $d - 1$. Soit $H \in L^2([0, 1]^d)$ telle que

$$\int_{[0, 1]^d} H(t) e^{-2i\pi n \cdot t} dt = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Écrivons $t = (t', s)$ avec $t' \in [0, 1]^{d-1}$ et $s \in [0, 1]$. Pour $m \in \mathbb{Z}^{d-1}$, posons

$$h_m(s) = \int_{[0, 1]^{d-1}} H(t', s) e^{-2i\pi m \cdot t'} dt'.$$

Par Fubini et Cauchy–Schwarz, h_m est définie presque partout et appartient à $L^2(0, 1)$. Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^1 h_m(s) e^{-2i\pi \ell s} ds = 0.$$

La complétude en dimension 1 implique donc $h_m = 0$ presque partout.

Comme $\mathbb{Z}^{d-1}$ est dénombrable, on peut choisir un même ensemble de mesure pleine sur lequel tous les h_m sont nuls et $H(\cdot, s) \in L^2([0, 1]^{d-1})$. Pour chaque s dans cet ensemble, tous les coefficients de Fourier de $H(\cdot, s)$ sont nuls. L'hypothèse de récurrence donne $H(\cdot, s) = 0$ presque partout. Par Fubini, $H = 0$ presque partout sur $[0, 1]^d$.

L'orthogonal de la famille est donc réduit à $\{0\}$, ce qui prouve sa complétude. La famille (φ_n) est ainsi une base hilbertienne de $L^2(Q)$.

5. Les coefficients dans cette base hilbertienne sont

$$\alpha_n = \langle \varphi_n, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{|Q|}} \int_Q f(x) e^{-ik_n \cdot x} dx.$$

Puisque $\alpha_n \varphi_n(x) = c_n e^{ik_n \cdot x}$, on a

$$c_n = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) e^{-ik_n \cdot x} dx.$$

La décomposition hilbertienne donne

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ |n_1|, \dots, |n_d| \leq N}} c_n e^{ik_n \cdot x}, \quad \text{dans } L^2(Q).$$

L'identité de Parseval s'écrit

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |c_n|^2.$$

Plus précisément, l'erreur de troncature vérifie

$$\left\| f - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ \max_j |n_j| \leq N}} c_n e^{ik_n \cdot x} \right\|_{L^2(Q)}^2 = |Q| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ \max_j |n_j| > N}} |c_n|^2 \longrightarrow 0.$$