
TD - Fondements Mathématiques



Fillère Mathématiques Appliquées & Modélisation
3^{ième} année

Enseignant: Denis Périce
Bâtiment Braconnier - bureau 229
perice@math.univ-lyon1.fr

Contents

I - Fonctions réelles à une variable	2
II - Nombres complexes	7
III - Séries de Fourier	9

Semestre d'automne 2026.

Fonctions réelles à une variable

Problème I.1 : Dessiner un graphe

On étudie la fonction réelle

$$f(x) := x^2 + \frac{1}{x}.$$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Résoudre $f(x) \geq 0$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Quelles sont les asymptotes verticales et horizontales de f ?

4. Montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^2, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

5. Calculer f' et dresser le tableau de variation de f . Montrer que f possède un unique extremum local et préciser sa nature ainsi que ses coordonnées.
6. Trouver les points d'inflexions de f .
7. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
8. Esquisser le graphe de f en représentant les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Problème I.2 : Théorèmes de Taylor

L'objectif de ce problème est de retrouver progressivement les différentes formules de Taylor à partir du théorème fondamental de l'analyse.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^4(I)$. Dans un premier temps, on fixe $x \in I$ tel que $x > a$.

Formule de Taylor avec reste intégral

1. Rappeler le théorème fondamental de l'analyse. En particulier, montrer que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t_1) dt_1.$$

2. En appliquant la question précédente à f' , montrer que

$$f'(t_1) = f'(a) + \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2.$$

En déduire que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x \int_a^{t_1} f''(t_2) dt_2 dt_1.$$

3. En itérant, montrer que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} f'''(t_3) dt_3 dt_2 dt_1.$$

4. Montrer, en inversant l'ordre d'intégration, que pour toute fonction continue g ,

$$\int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} g(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 = \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 g(t) dt.$$

5. En déduire la **formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt.$$

On notera dans la suite

$$R_2(x) := f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \right).$$

Formule de Taylor–Lagrange

6. Puisque f''' est continue sur $[a, x]$, on pose

$$m := \min_{t \in [a, x]} f'''(t),$$

$$M := \max_{t \in [a, x]} f'''(t).$$

Montrer que

$$\frac{m}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt \leq R_2(x) \leq \frac{M}{2} \int_a^x (x-t)^2 dt.$$

7. En déduire que

$$m \frac{(x-a)^3}{3!} \leq R_2(x) \leq M \frac{(x-a)^3}{3!}.$$

8. Montrer qu'il existe $c \in [a, x]$ tel que

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3.$$

9. En déduire la **formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3.$$

10. En déduire l'**inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre 2** :

$$\left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \right| \leq \sup_{t \in [a, x]} |f'''(t)| \frac{|x-a|^3}{3!}.$$

Formule de Taylor–Young

11. Montrer que f''' est bornée dans un voisinage de a . En utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^2} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

12. En déduire la **formule de Taylor–Young à l’ordre 2** :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2).$$

13. Expliquer pourquoi les mêmes résultats restent valables pour $x < a$.

(Bonus) Généralisation à l’ordre n

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et supposons $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$.

14. Démontrer la **formule de Taylor avec reste intégral à l’ordre n** :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

15. Montrer qu’il existe un réel $c \in [a, x]$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Cette formule est appelée **formule de Taylor–Lagrange à l’ordre n** .

16. En déduire l’**inégalité de Taylor–Lagrange à l’ordre n** .

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \right| \leq \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

17. En déduire que la fonction exponentielle est analytique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

18. En déduire enfin la **formule de Taylor–Young à l’ordre n** :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Problème I.3 : Développements limités

1. Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l’ordre 3 en 0 :

$$e^x, \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \ln(1 + x).$$

2. Faire de même pour

$$e^x \cos(x), \quad \ln(1 + \sin(x)).$$

3. Soit $P_2(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 0.1]$,

$$|e^x - P_2(x)| \leq \frac{e^{0.1}}{3!} x^3.$$

4. En utilisant $e^{0.1} < 2$, montrer que

$$|e^{0.1} - 1.105| < \frac{2}{6} \times 10^{-3}.$$

5. Montrer qu'un développement limité de e^x à l'ordre n en 0 permet d'obtenir une approximation de $e^{0.1}$ à 10^{-n} près ?

Problème I.4 : Résolution asymptotique d'une équation

Pour $\epsilon > 0$, on considère l'équation

$$x + \ln(1 + x) = \epsilon.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution $x_\epsilon > 0$ et que

$$x_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

2. À l'aide du développement limité de $\ln(1 + x)$, montrer que

$$\epsilon = 2x_\epsilon - \frac{x_\epsilon^2}{2} + \frac{x_\epsilon^3}{3} + o(x_\epsilon^3).$$

3. Chercher x_ϵ sous la forme

$$x_\epsilon = a\epsilon + b\epsilon^2 + c\epsilon^3 + o(\epsilon^3),$$

et déterminer a , b et c .

4. En déduire un développement limité de x_ϵ à l'ordre 3 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Problème I.5 : Approximation d'une intégrale

Pour $\epsilon > 0$, on pose

$$I(\epsilon) := \int_0^\epsilon \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

1. Calculer le développement limité de

$$\frac{\sin(x)}{x}$$

à l'ordre 4 en 0.

2. En intégrant ce développement, montrer que

$$I(\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{18} + \frac{\epsilon^5}{600} + o(\epsilon^5).$$

3. En utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange pour $\sin(x)$, donner une borne sur l'erreur commise en approchant $I(\epsilon)$ par

$$\epsilon - \frac{\epsilon^3}{18}.$$

Problème I.6 : (Bonus) Une série asymptotique divergente : la série d'Euler

Pour $\epsilon > 0$, on définit

$$f(\epsilon) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt.$$

1. Montrer que, pour tout $u \geq 0$ et tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n-1} (-u)^k + \frac{(-u)^n}{1+u}.$$

2. En déduire que

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + R_n(\epsilon), \quad \text{où} \quad R_n(\epsilon) := (-\epsilon)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt.$$

On pourra utiliser

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!.$$

3. Montrer que $|R_n(\epsilon)| \leq n! \epsilon^n$. En déduire que, pour tout n fixé,

$$f(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} k! (-\epsilon)^k + O(\epsilon^n).$$

4. Montrer que la série suivante diverge pour tout $\epsilon \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! (-\epsilon)^k.$$

5. Pour $0 < \epsilon < 1$ fixé, on pose $B_n(\epsilon) := n! \epsilon^n$. Montrer que

$$\frac{B_{n+1}(\epsilon)}{B_n(\epsilon)} = (n+1)\epsilon.$$

En déduire que $B_n(\epsilon)$ décroît tant que

$$(n+1)\epsilon < 1,$$

et croît dès que

$$(n+1)\epsilon > 1.$$

6. En déduire que la meilleure borne obtenue à la question 3 est atteinte pour un entier n_ϵ tel que

$$n_\epsilon \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\epsilon}.$$

7. En utilisant la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

montrer que la borne sur l'erreur est de l'ordre de

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-1/\epsilon}.$$

8. Comparer ce résultat avec ce que l'on obtiendrait en faisant tendre n vers $+\infty$ à $\epsilon > 0$ fixé. Expliquer pourquoi, bien que la série soit divergente, ses premières sommes partielles donnent d'excellentes approximations lorsque ϵ est petit.

Nombres complexes

Problème II.1 : Forme polaire et géométrie

1. Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer le module et un argument, puis l'écrire sous forme exponentielle :

$$1 + i, \quad -\sqrt{3} + i.$$

2. Montrer que multiplier un nombre complexe z par $e^{i\theta}$ correspond géométriquement à effectuer une rotation d'angle θ autour de l'origine. En déduire qu'en appliquant successivement à $1 + i$ une rotation d'angle $\frac{7\pi}{12}$ puis une dilatation de facteur $\sqrt{2}$, on obtient $-\sqrt{3} + i$.

Problème II.2 : Racines carrées et équations du second degré

1. On cherche les solutions de

$$z^2 = 3 + 4i.$$

En écrivant $z = x + iy$ et en utilisant $|z|^2 = |3 + 4i|$, déterminer les deux racines carrées de $3 + 4i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 3z + (3 + i) = 0,$$

puis factoriser le polynôme correspondant dans $\mathbb{C}$.

Problème II.3 : Racines n -ièmes

1. Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions de

$$z^n = re^{i\theta}$$

sont

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

2. Résoudre sous forme algébrique

$$z^3 = -8.$$

Représenter les solutions dans le plan complexe.

3. Déterminer les racines n -ièmes de l'unité et expliquer pourquoi elles sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

Problème II.4 : Exponentielle, trigonométrie et logarithme complexes

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$e^{z+2i\pi} = e^z,$$

$$\cos(iy) = \cosh(y),$$

$$\sin(iy) = i \sinh(y).$$

En déduire que l'exponentielle complexe n'est pas injective et que $\sin$ et $\cos$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

2. Soit $z = re^{i\theta} \neq 0$. Montrer que toutes les solutions $w \in \mathbb{C}$ de

$$e^w = z$$

sont

$$w = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Résoudre en particulier

$$e^w = 2i.$$

On appelle **logarithme complexe** d'un nombre $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre $w \in \mathbb{C}$ tel que

$$e^w = z.$$

Le logarithme complexe est donc multivalué et n'est défini que pour $z \neq 0$.

3. Déterminer tous les logarithmes complexes de -1 .

Problème II.5 : Application : l'oscillateur harmonique

On considère l'équation

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega > 0.$$

1. Chercher des solutions complexes sous la forme

$$z(t) = e^{\lambda t}$$

et déterminer les valeurs possibles de λ .

2. En déduire que, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$,

$$z(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$

est une solution complexe de l'équation.

3. En utilisant la formule d'Euler, montrer que cette solution est réelle si et seulement si

$$b = \bar{a}.$$

En déduire que les solutions réelles sont de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminer la solution vérifiant

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

5. (**Bonus**) Montrer que l'énergie

$$E(t) := \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{\omega^2}{2}x(t)^2$$

est constante au cours du temps.

Séries de Fourier

Problème III.1 : Calcul de série

1. Soit $a \in \mathbb{R}, T > 0$ et $f \in L^2([a, a+T], \mathbb{C})$ écrire la décomposition en série de Fourier de f .
2. On considère $f(x) = x$ sur $] -\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

3. En utilisant l'identité de Parseval, en déduire la valeur de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. Soit $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, montrer que f admet une décomposition

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$

Donner les expressions intégrales de a_n et b_n .

5. On considère désormais la fonction 2π -périodique telle que $g(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. Écrire sa série de Fourier en cosinus et sinus.
6. En déduire, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2}$.

Indication : appliquer la décomposition en cosinus à $x := \theta - \pi$.

Problème III.2 : Cordes vibrantes

On compare, dans un modèle simplifié, deux modes d'excitation d'une corde, inspirés respectivement de la guitare et du piano. On considère une corde de longueur $L > 0$, fixée aux deux extrémités, dont le déplacement transversal u vérifie l'équation des ondes

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x, t) &= c^2 \partial_x^2 u(x, t), & x \in]0, L[, & t > 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

où $c > 0$ est la célérité des ondes.

Soient $a \in]0, L[$. On définit les profils

$$T_a(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{L-x}{L-a}, & a < x \leq L, \end{cases} \quad P(x) = 4 \frac{x(L-x)}{L^2}.$$

La corde pincée (guitare) est lâchée sans vitesse depuis le profil triangulaire T_a . Pour la corde frappée (piano), on choisit un déplacement initial nul et une vitesse initiale parabolique :

$$\begin{aligned} u_g(x, 0) &= T_a(x), & \partial_t u_g(x, 0) &= 0, \\ u_p(x, 0) &= 0, & \partial_t u_p(x, 0) &= P(x). \end{aligned}$$

1. Pour chaque $t \geq 0$, prolonger $u(\cdot, t)$ par imparité sur $[-L, L]$, puis par $2L$ -périodicité. Justifier que l'on peut écrire

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{dans } L^2(0, L),$$

avec

$$a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. Montrer que les coefficients modaux satisfont

$$a_n''(t) + w_n^2 a_n(t) = 0, \quad w_n := \frac{n\pi c}{L}.$$

En déduire que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

3. Esquisser les fonctions T_a et P puis montrer que, pour tout $x \in [0, L]$,

$$T_a(x) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$P(x) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

4. En utilisant les conditions initiales, démontrer que les solutions sont données par

$$u_g(x, t) = \frac{2L^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{n^2} \cos(w_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$u_p(x, t) = \frac{16L}{c\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} \sin(w_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

5. Quels modes ne sont pas excités pour la corde pincée ? Distinguer les cas où a/L est rationnel ou irrationnel. Quels modes ne sont pas excités pour la corde frappée ?
6. (Bonus) On prend désormais $a = L/2$. L'amplitude du n -ième mode de déplacement est

$$M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}.$$

Comparer, pour les deux excitations, les modes présents et les rapports M_n/M_1 . Interpréter cette comparaison en termes de contenu harmonique, dans le cadre de ce modèle.

7. (Bonus) En utilisant l'identité trigonométrique $\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha)]$, montrer que

$$u_g(x, t) = \frac{1}{2} \tilde{T}_a(x - ct) + \frac{1}{2} \tilde{T}_a(x + ct),$$

où $\tilde{T}_a$ désigne le prolongement impair et $2L$ -périodique de T_a .

Interpréter cette expression comme la superposition de deux ondes se propageant en sens opposés. Quel terme correspond à une propagation vers la droite ? Vers la gauche ? Préciser leur vitesse de propagation.

Problème III.3 : (Bonus) Convergence ponctuelle et discontinuités

Pour une fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, intégrable sur une période, on note

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad N \geq 0.$$

Le but est de démontrer le théorème suivant.

Theorem 1: Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, C^1 par morceaux sur une subdivision finie d'une période, avec des limites latérales finies pour f et f' aux points de raccord. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ désignent les limites à gauche et à droite. En particulier, la série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point où f est continue.

Dans la suite, f satisfait les hypothèses du théorème.

1. Montrer que, pour toute fonction $g \in L^1(0, \pi)$,

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow +\infty \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \int_0^{\pi} g(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

C'est le lemme de Riemann–Lebesgue.

Indication : commencer par les fonctions en escalier, puis utiliser leur densité dans $L^1(0, \pi)$.

2. On définit le noyau de Dirichlet par

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}.$$

Montrer que D_N est une fonction réelle et paire, et que

$$D_N(t) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}, \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Calculer $D_N(0)$ et montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1.$$

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.$$

4. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour $0 < t \leq \pi$, on pose

$$g_x(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin(t/2)}.$$

Montrer que g_x admet une limite finie lorsque $t \rightarrow 0^+$. En déduire que $g_x \in L^1(0, \pi)$.

5. Montrer que

$$S_N f(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g_x(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt.$$

En déduire le théorème de Dirichlet. La limite dépend-elle de la valeur attribuée à $f(x)$ en un point de discontinuité ?

Problème III.4: (Bonus) Séries de Fourier à plusieurs dimensions

Soient $d \geq 1$ et $(e_1, \dots, e_d)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^d$, non nécessairement orthogonale. On note $E = (e_1 \cdots e_d)$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette base. On considère le réseau Λ et sa cellule fondamentale Q :

$$\Lambda = \left\{ \sum_{j=1}^d m_j e_j \mid (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \right\},$$

$$Q = \left\{ \sum_{j=1}^d t_j e_j \mid 0 \leq t_j < 1, \quad 1 \leq j \leq d \right\}.$$

On note $|Q|$ le volume de Q . Une fonction définie sur Q peut être prolongée par Λ -périodicité.

1. Montrer qu'il existe une unique base $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ telle que

$$e_i \cdot e_j^* = \delta_{ij}.$$

Exprimer la matrice $E_* = (e_1^* \cdots e_d^*)$ en fonction de E . Cette base est appelée la base duale, identifiée à une base de $\mathbb{R}^d$ au moyen du produit scalaire.

2. On définit le réseau réciproque par

$$\Lambda^* = \{k \in \mathbb{R}^d \mid k \cdot \lambda \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda\}.$$

Montrer que

$$\Lambda^* = \{k_n \mid n \in \mathbb{Z}^d\}, \quad k_n = 2\pi \sum_{j=1}^d n_j e_j^*.$$

En déduire que $x \mapsto e^{ik \cdot x}$ est Λ -périodique si et seulement si $k \in \Lambda^*$.

3. À l'aide du changement de variables $x = Et$, exprimer $|Q|$ en fonction de E . Montrer ensuite que la famille

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|Q|}} e^{ik_n \cdot x}, \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

est orthonormale dans $L^2(Q)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_Q \overline{f(x)} g(x) dx.$$

4. En utilisant successivement la complétude des séries de Fourier à une dimension dans chacune des variables t_j , montrer que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est une base hilbertienne de $L^2(Q)$.
5. En déduire que toute fonction $f \in L^2(Q)$ admet une décomposition

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ |n_1|, \dots, |n_d| \leq N}} c_n e^{ik_n \cdot x}, \quad \text{dans } L^2(Q).$$

Donner l'expression des coefficients c_n et écrire l'identité de Parseval correspondante.