

amplitude

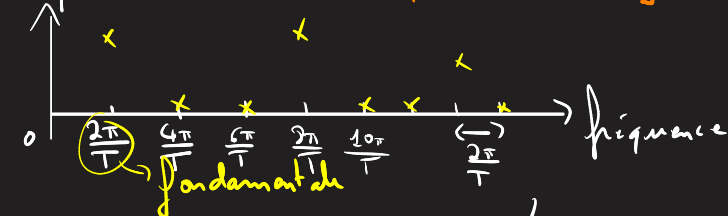


Fourier

→

Séries de Fourier

amplitude



décomposer un signal en sinus/cosinus.

Algèbre linéaire dans $\mathbb{C}^d$, $e_1 := (1, 0, \dots, 0) \dots, e_d := (0, \dots, 0, 1)$ base canonique $x := (x_1, \dots, x_d), y := (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^d \bar{x}_i y_i$ (produit hermitien)et $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ or $x_i = \langle e_i, x \rangle$ donc $x = \sum_{i=1}^d \langle e_i, x \rangle e_i$ et Pythagore: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^d |\langle e_i, x \rangle|^2$.Série de Fourier: $f: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{C}$ décomposée dans la base

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, x \in [0, 2\pi[, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, f \rangle e_k \text{ où } \underbrace{\langle e_k, f \rangle}_{\in \mathbb{C}} = \int_0^{2\pi} \overline{e_k(x)} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$\text{donc } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, f \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

Def: Espace de Hilbert: $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tel que
produit scalaire hermitien:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in \mathcal{H}, \langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \cdot \forall x, y \in \mathcal{H}, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \\ \cdot \forall x \in \mathcal{H}, \langle x, x \rangle \geq 0 \rightarrow \text{on définit } \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array} \right.$$

et $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

"pas de trous".

et $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ est complet (les suites de Cauchy convergent)

$$\text{alors } \langle \lambda x + y, z \rangle = \overline{\langle z, \lambda x + y \rangle} = \overline{\lambda \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle z, x \rangle} + \overline{\langle z, y \rangle} = \overline{\lambda} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

(sesquilineaire)

Def: Base de Hilbert: $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ une famille:• orthonormale: $\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ • génératrice: $\forall x \in \mathcal{H}, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \subset \mathbb{C}$ tq $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ Si I est dénombrable, on dit que $\mathcal{H}$ est séparable.

Théorème: Parseval (Pythagore)

Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert séparable et $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une base de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$,
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2$$

Propriété: Inégalité de Bessel: Si $(e_k) \subset \mathcal{H}$ orthonormée et $x \in \mathcal{H}$, alors

$$\sum_{k=1}^m |\langle e_k, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

preuve: $0 \leq \left\langle x - \sum_{k=1}^m \langle e_k, x \rangle e_k, x - \sum_{k=1}^m \langle e_k, x \rangle e_k \right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^m \langle e_k, x \rangle \langle x, e_k \rangle$
 $= \sum_{k=1}^m \langle e_k, x \rangle \langle e_k, x \rangle + \sum_{k=1}^m \langle e_k, x \rangle \langle e_k, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^m |\langle e_k, x \rangle|^2$

preuve (Parseval): $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2$ converge par Bessel

et $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ s'en suit $\langle e_k, x \rangle = \sum_q \lambda_q \langle e_k, e_q \rangle = \lambda_k$

Donc $\boxed{x = \sum_k \langle e_k, x \rangle e_k}$ et $\|x\|^2 = \sum_{k,q} \langle e_k, x \rangle \overline{\langle e_q, x \rangle} \langle e_q, e_k \rangle = \sum_k |\langle e_k, x \rangle|^2$ $\square$

Série de Fourier: $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ est un espace de Hilbert où $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert si $e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$?

Soit $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C}) \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

Dans ce cas, on note $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$.

ℓ : mesure de Lebesgue $\ell([a, b]) = b - a$. Si $f, g \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$

$f \stackrel{L^2}{=} g$ si $\ell(\{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$

$\Rightarrow f = g$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. "petit"

Par exemple $f = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, 2\pi[\\ 0 & \text{en } 2\pi \end{cases}$ $\stackrel{L^2}{=} \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, 2\pi] \\ 0 & \text{en } 2\pi \end{cases} = g$

car $f(x) \neq g(x) \Leftrightarrow x = 2\pi$ et $\ell(\{2\pi\}) = 2\pi - 2\pi = 0$

$$L^2([0, 2\pi], \mathbb{C}) = \left\{ f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} = L^2$$

→ fonctions de carré intégrables modulo $\sim_{L^2}$.

Propriété: $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ est un espace de Hilbert avec $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$

preuve (partielle): $\langle f, \lambda g + h \rangle = \int \overline{f} (\lambda g + h) = \lambda \int \overline{f} g + \int \overline{f} h = \lambda \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$
 $\langle \overline{g}, f \rangle = \int \overline{\overline{g}} f = \int g \overline{f} = \langle f, g \rangle, \quad \langle f, f \rangle = \int |f|^2 \geq 0$

et $\|f\| = 0 \Rightarrow f \stackrel{L^2}{=} 0$ important car $\int_0^{2\pi} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right|^2 = 0$

complétude: admis (important aussi) $\square$

propriété: $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert de $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$

preuve: Orthogonalité: $\langle e_k, e_q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(q-k)x} dx = \delta_{qk}$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } q = k: \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1 \\ \text{Sinon } \frac{1}{2i\pi(q-k)} \left[\frac{e^{i(q-k)x}}{i} \right]_0^{2\pi} = 0 \\ \quad = 1 - 1 = 0 \end{array} \right.$

• Complétude: TOU (Bonus) $\square$

Conséquence: si $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ alors

décomposition en série de Fourier: $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, f \rangle e_k$ (égalité dans L^2)

Formule de Parseval: $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle e_k, f \rangle|^2$