

Problème I : étude de fonction

Pour $\varepsilon > 0$, on considère la fonction réelle

$$f_\varepsilon(x) := \frac{x^2}{2} - (1 + \varepsilon^2)x + \ln(1 + x).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f_ε et ses limites aux bornes de ce domaine. Préciser les éventuelles asymptotes verticales et horizontales.
2. Calculer f'_ε et montrer que f_ε possède exactement deux extrema locaux, d'abscisses

$$x_\varepsilon^- = \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad x_\varepsilon^+ = \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Dresser le tableau de variation de f_ε et préciser la nature de chacun de ces extrema.

3. Déterminer les intervalles sur lesquels f_ε est convexe ou concave. Montrer que sa courbe possède un unique point d'inflexion et donner ses coordonnées.
4. Calculer le développement limité de f_ε à l'ordre 3 en 0. En déduire l'équation de la tangente au point d'inflexion et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
5. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $g(t) = \sqrt{1+t}$. En déduire le développement limité de x_ε^+ à l'ordre 3 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.
6. À l'aide de l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\left| \sqrt{1+t} - 1 - \frac{t}{2} \right| \leq \frac{t^2}{8}, \quad \text{en déduire} \quad \left| x_\varepsilon^+ - \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon^5}{128}.$$

7. Esquisser le graphe de f_ε en représentant les asymptotes, extrema, point d'inflexion et tangente obtenues lors des questions précédentes.

Problème II : une équation différentielle complexe

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'équation différentielle pour $f \in C^{2n}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$f^{(2n)}(t) - (2 + 3i)f^{(n)}(t) + 6if(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On cherche à déterminer ses solutions et à étudier leur comportement lorsque $t \rightarrow \infty$.

1. Montrer que la fonction $f_z(t) := e^{zt}$, avec $z \in \mathbb{C}$, est solution si et seulement si $P_n(z) = 0$, où

$$P_n(z) := z^{2n} - (2 + 3i)z^n + 6i.$$

Ces solutions sont appelées *modes exponentiels*.

2. Déterminer sous forme algébrique les deux racines carrées de $-5 - 12i$.

On donne $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

3. En utilisant la question précédente, factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme

$$Q(w) := w^2 - (2 + 3i)w + 6i.$$

En déduire une factorisation de P_n en produit de deux polynômes de degré n .

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, sous forme exponentielle, les équations $z^n = 2$, $z^n = 3i$. En déduire la factorisation de P_n en produit de polynômes de degré 1.
5. On admet que toute solution de l'équation différentielle est une combinaison linéaire à coefficients complexes des modes exponentiels obtenus précédemment. Écrire la forme générale de ces solutions.

6. Démontrer que $|e^{zt}| = e^{t\operatorname{Re}(z)}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

On prend désormais $n = 3$: représenter les racines de P_3 dans le plan complexe et déterminer la limite du module des modes exponentiels correspondants lorsque $t \rightarrow \infty$.

Problème III : séries de Fourier et diffusion de la chaleur

On considère la fonction f , définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$.

1. Soit $e_k(x) := e^{2i\pi kx}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Soit $k, q \in \mathbb{Z}$, vérifier que

$$\langle e_k, e_q \rangle := \int_0^1 \overline{e_k(x)} e_q(x) dx = \delta_{k,q}.$$

2. Calculer les coefficients de Fourier complexes

$$c_k := \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi kx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

et écrire la série de Fourier complexe de f .

3. Montrer que pour $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} = \frac{1}{2} - x.$$

4. Évaluer une série en appliquant l'identité de Parseval à f .

Partie bonus : diffusion de la chaleur

Un barreau de longueur 1 est initialement à l'équilibre thermique, ses extrémités étant maintenues aux températures 0 et 2. À l'instant $t = 0$, la température imposée à droite est abaissée à 1. La température u vérifie $\forall x \in]0, 1[, t > 0$

$$\partial_t u(x, t) = D \partial_x^2 u(x, t), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad u(x, 0) = 2x,$$

où $D > 0$ est le coefficient de diffusion. On pourra admettre les dérivations terme à terme des séries.

5. En effectuant le changement de variable $x = (y + 1)/2$ dans la décomposition en série de Fourier obtenue dans la question 3., montrer que

$$2y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi y), \quad y \in]0, 1[.$$

6. Déterminer l'unique solution stationnaire s ($\partial_t s = 0$) satisfaisant les conditions aux bords. On pose $v(x, t) = u(x, t) - s(x)$. Écrire l'équation, les conditions aux bords et la condition initiale satisfaites par v .

7. En prolongeant v par imparité, montrer que l'on peut décomposer v sous la forme

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x), \quad \text{avec} \quad a_n(t) := 2 \int_0^1 v(x, t) \sin(n\pi x) dx.$$

8. Montrer que

$$a'_n(t) + D n^2 \pi^2 a_n(t) = 0.$$

Résoudre ces équations et utiliser les questions précédentes pour déterminer les coefficients $a_n(0)$. En déduire une expression de $u(x, t)$ sous forme de série.

9. Montrer que, pour $x \in [0, 1]$ et $t > 0$,

$$|u(x, t) - x| \leq \frac{2}{\pi(e^{D\pi^2 t} - 1)}.$$

En déduire que $u(\cdot, t)$ converge uniformément vers $x \mapsto x$ lorsque $t \rightarrow \infty$.