

Problème I : étude de fonction

On fixe $\varepsilon > 0$ et l'on considère

$$f_\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} - (1 + \varepsilon^2)x + \ln(1 + x).$$

1. **Domaine, limites et asymptotes.** Le logarithme impose $1 + x > 0$, donc le domaine est $] -1, +\infty[$. Lorsque $x \rightarrow -1^+$, la partie polynomiale a une limite finie et $\ln(1 + x) \rightarrow -\infty$. D'autre part, $f_\varepsilon(x) \sim x^2/2$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f_\varepsilon(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\varepsilon(x) = +\infty.$$

La droite $x = -1$ est une asymptote verticale ; il n'y a pas d'asymptote horizontale.

2. **Extrema et variations.** On calcule

$$f'_\varepsilon(x) = x - (1 + \varepsilon^2) + \frac{1}{1 + x} = \frac{x^2 - \varepsilon^2 x - \varepsilon^2}{1 + x}.$$

Le numérateur a pour discriminant $\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2 > 0$ et pour racines

$$x_\varepsilon^\pm = \frac{\varepsilon^2}{2} \pm \varepsilon \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Ce numérateur vaut 1 en -1 et $-\varepsilon^2$ en 0. Ses racines étant de signes opposés, on a $-1 < x_\varepsilon^- < 0 < x_\varepsilon^+$. Le dénominateur est positif sur le domaine, d'où le tableau :

x	-1	x_ε^-	x_ε^+	$+\infty$			
$f'_\varepsilon(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f_\varepsilon(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_\varepsilon(x_\varepsilon^-)$	$\searrow$	$f_\varepsilon(x_\varepsilon^+)$	$\nearrow$	$+\infty$

Il y a exactement deux extrema locaux : un maximum strict en x_ε^- et un minimum strict en x_ε^+ . Comme $f_\varepsilon(0) = 0$ et que f_ε décroît strictement entre ces deux points,

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon^-) > 0, \quad f_\varepsilon(x_\varepsilon^+) < 0.$$

3. **Convexité et point d'inflexion.**

$$f''_\varepsilon(x) = 1 - \frac{1}{(1 + x)^2} = \frac{x(x + 2)}{(1 + x)^2}.$$

Sur le domaine, $x + 2 > 0$: la dérivée seconde est négative sur $] -1, 0[$ et positive sur $]0, +\infty[$. La fonction est donc concave sur $] -1, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$. L'unique changement de signe de f''_ε a lieu en 0 ; le point d'inflexion est $I = (0, 0)$.

4. **Développement limité et tangente.** En utilisant $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$, on obtient, pour ε fixé,

$$f_\varepsilon(x) = -\varepsilon^2 x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

La tangente en I a pour équation $y = -\varepsilon^2 x$. La différence avec la tangente est équivalente à $x^3/3$: au voisinage de 0, la courbe est au-dessous à gauche et au-dessus à droite.

Cette position vaut en fait sur tout le domaine. En effet,

$$f_\varepsilon(x) + \varepsilon^2 x = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t} dt,$$

car les deux membres s'annulent en 0 et ont la même dérivée. L'intégrale est strictement négative pour $-1 < x < 0$ et strictement positive pour $x > 0$.

5. **Développement de x_ε^+ .** Pour $g(t) = \sqrt{1+t}$, on a $g(0) = 1$ et $g'(0) = 1/2$, donc

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) \quad (t \rightarrow 0).$$

En substituant $t = \varepsilon^2/4$ dans l'expression de x_ε^+ , il vient

$$x_\varepsilon^+ = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} + o(\varepsilon^3) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

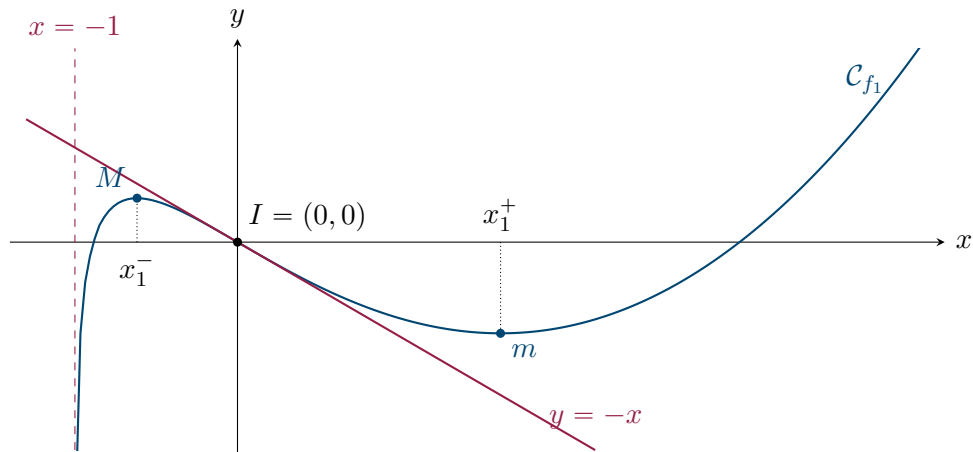
6. **Contrôle du reste.** Pour $s \geq 0$, on a $g''(s) = -1/[4(1+s)^{3/2}]$, donc $|g''(s)| \leq 1/4$. L'inégalité de Taylor–Lagrange sur $[0, t]$ donne, pour $t \geq 0$,

$$\left| \sqrt{1+t} - 1 - \frac{t}{2} \right| \leq \frac{\sup_{s \in [0, t]} |g''(s)|}{2} t^2 \leq \frac{t^2}{8}.$$

En prenant $t = \varepsilon^2/4$ et en multipliant par ε ,

$$\left| x_\varepsilon^+ - \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon^5}{128}.$$

7. **Esquisse.** La figure ci-dessous est tracée pour $\varepsilon = 1$; les variations, la convexité et la position relative à la tangente sont les mêmes pour tout $\varepsilon > 0$. On note sur la figure $M = (x_1^-, f_1(x_1^-))$ et $m = (x_1^+, f_1(x_1^+))$.



Problème II : une équation différentielle complexe

1. **Modes exponentiels.** Pour $f_z(t) = e^{zt}$, on a $f_z^{(n)}(t) = z^n e^{zt}$ et $f_z^{(2n)}(t) = z^{2n} e^{zt}$. Le membre de gauche de l'équation vaut donc

$$(z^{2n} - (2 + 3i)z^n + 6i)e^{zt} = P_n(z)e^{zt}.$$

Comme $e^{zt} \neq 0$, f_z est solution si et seulement si $P_n(z) = 0$.

2. **Racines carrées de $-5 - 12i$.** Si $(a + ib)^2 = -5 - 12i$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$a^2 - b^2 = -5, \quad 2ab = -12, \quad a^2 + b^2 = |-5 - 12i| = 13.$$

On en déduit $a^2 = 4$ et $b^2 = 9$. Puisque $ab = -6$, les deux racines sont $\boxed{2 - 3i \text{ et } -2 + 3i}$.

3. **Factorisation en deux facteurs.** Le discriminant de $Q(w) = w^2 - (2 + 3i)w + 6i$ est

$$\Delta = (2 + 3i)^2 - 24i = -5 - 12i.$$

Ses racines sont $(2 + 3i + (2 - 3i))/2 = 2$ et $(2 + 3i - (2 - 3i))/2 = 3i$. Ainsi,

$$\boxed{Q(w) = (w - 2)(w - 3i), \quad P_n(z) = (z^n - 2)(z^n - 3i).}$$

4. **Racines et factorisation complète.** Les modules et arguments donnent respectivement

$$\alpha_k = 2^{1/n} e^{2ik\pi/n}, \quad \beta_k = 3^{1/n} e^{i(\pi/2 + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Chaque famille contient n racines distinctes. Les deux familles sont disjointes, puisque z^n ne peut valoir à la fois 2 et $3i$. Par conséquent,

$$\boxed{P_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \alpha_k) \prod_{k=0}^{n-1} (z - \beta_k).}$$

5. **Solution générale.** D'après le résultat admis dans l'énoncé, les solutions sont exactement

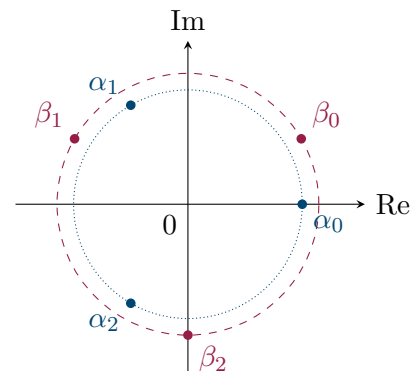
$$\boxed{f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (A_k e^{\alpha_k t} + B_k e^{\beta_k t}), \quad A_k, B_k \in \mathbb{C}.}$$

6. **Module des modes et cas $n = 3$.** Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{zt} = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)), \quad \boxed{|e^{zt}| = e^{at} = e^{t \operatorname{Re}(z)}}.$$

Pour $n = 3$, posons $r = \sqrt[3]{2}$ et $s = \sqrt[3]{3}$. Les α_k ont pour arguments $0, 2\pi/3, 4\pi/3$; les β_k ont pour arguments $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$. Les six racines et les limites des modules sont :

Racine	Forme algébrique	$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{zt} $
α_0	r	$+\infty$
α_1	$-r/2 + i\sqrt{3}r/2$	0
α_2	$-r/2 - i\sqrt{3}r/2$	0
β_0	$\sqrt{3}s/2 + is/2$	$+\infty$
β_1	$-\sqrt{3}s/2 + is/2$	0
β_2	$-is$	1



Le mode e^{-ist} a un module constant égal à 1, mais n'a pas de limite lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Problème III : séries de Fourier et diffusion de la chaleur

On considère $f(x) = x$ sur $[0, 1]$ et $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

1. **Orthonormalité.** Pour $k, q \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_k, e_q \rangle = \int_0^1 e^{2i\pi(q-k)x} dx = \begin{cases} 1, & q = k, \\ \frac{e^{2i\pi(q-k)} - 1}{2i\pi(q-k)} = 0, & q \neq k. \end{cases}$$

C'est bien $\delta_{k,q}$.

2. **Coefficients et série de Fourier.** On a $c_0 = \int_0^1 x dx = 1/2$. Pour $k \neq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} c_k &= \left[-\frac{x e^{-2i\pi kx}}{2i\pi k} \right]_0^1 + \frac{1}{2i\pi k} \int_0^1 e^{-2i\pi kx} dx \\ &= -\frac{1}{2i\pi k} = \frac{i}{2\pi k}. \end{aligned}$$

La série de Fourier complexe est donc

$$\boxed{\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{i}{2\pi k} e^{2i\pi kx}},$$

où la somme est comprise comme la limite des sommes symétriques $\sum_{k=-N}^N c_k e^{2i\pi kx}$.

3. **Somme de la série de sinus.** Le prolongement de période 1 de $x \mapsto x$ sur $]0, 1[$ est C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet assure que sa série de Fourier converge vers x pour $0 < x < 1$. En regroupant les indices n et $-n$ dans les sommes symétriques,

$$c_n e^{2i\pi nx} + c_{-n} e^{-2i\pi nx} = \frac{i}{2\pi n} (e^{2i\pi nx} - e^{-2i\pi nx}) = -\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} = \frac{1}{2} - x, \quad 0 < x < 1.}$$

Aux extrémités 0 et 1, la série de Fourier de f converge vers la moyenne des limites latérales, soit $(0 + 1)/2 = 1/2$.

4. **Identité de Parseval.** Puisque $f \in L^2(0, 1)$, Parseval donne

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2}.$$

On en déduit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie bonus : diffusion de la chaleur

5. **Série de sinus adaptée au barreau.** Pour $0 < y < 1$, on peut appliquer la question 3 à $x = (y + 1)/2$. Comme $\sin(n\pi(y + 1)) = (-1)^n \sin(n\pi y)$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi y)}{\pi n} = \frac{1}{2} - \frac{y+1}{2} = -\frac{y}{2}.$$

En multipliant par -4 ,

$$2y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi y), \quad 0 < y < 1.$$

6. **Solution stationnaire et changement d'inconnue.** Une solution stationnaire vérifie $Ds'' = 0$, donc est affine. Les conditions $s(0) = 0$, $s(1) = 1$ imposent l'unique solution $s(x) = x$. En posant $v(x, t) = u(x, t) - x$, on obtient

$$\begin{cases} \partial_t v = D \partial_x^2 v, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0) = x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

La donnée initiale à droite vaut 2, alors que $u(1, t) = 1$ pour $t > 0$: il n'y a donc pas de continuité au coin $(1, 0)$. La condition initiale s'entend à l'intérieur du barreau.

7. **Décomposition en sinus.** Pour $t > 0$, on prolonge $v(\cdot, t)$ par imparité sur $[-1, 1]$, puis par périodicité de période 2. Les conditions aux bords rendent ce prolongement continu aux raccords. Dans sa série de Fourier réelle, le terme constant et les termes en cosinus sont nuls par imparité. Les coefficients de sinus sont

$$a_n(t) = \int_{-1}^1 v(x, t) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 v(x, t) \sin(n\pi x) dx.$$

La série de Fourier du prolongement, continu et C^1 par morceaux, donne donc

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x).$$

8. **Évolution des coefficients et expression de u .** En utilisant l'équation de la chaleur, puis deux intégrations par parties, on trouve pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} a'_n(t) &= 2D \int_0^1 \partial_x^2 v(x, t) \sin(n\pi x) dx \\ &= 2D [\partial_x v(x, t) \sin(n\pi x)]_0^1 - 2Dn\pi [v(x, t) \cos(n\pi x)]_0^1 \\ &\quad - 2Dn^2\pi^2 \int_0^1 v(x, t) \sin(n\pi x) dx \\ &= -Dn^2\pi^2 a_n(t). \end{aligned}$$

Les termes de bord s'annulent grâce à $\sin(0) = \sin(n\pi) = 0$ et à $v(0, t) = v(1, t) = 0$. Ainsi,

$$a'_n(t) + Dn^2\pi^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(t) = a_n(0)e^{-Dn^2\pi^2 t}.$$

La question 5, divisée par 2, fournit la série de sinus de la donnée initiale $v(x, 0) = x$, d'où

$$a_n(0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Finalement,

$$u(x, t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-Dn^2\pi^2 t} \sin(n\pi x), \quad t > 0.$$

Pour tout $\tau > 0$, le facteur $e^{-Dn^2\pi^2\tau}$ assure la convergence uniforme de la série et de ses dérivées ∂_t , ∂_x et ∂_x^2 sur $[0, 1] \times [\tau, +\infty[$: l'équation et les conditions aux bords sont donc vérifiées. Pour vérifier la condition initiale, fixons $x \in]0, 1[$. Les sommes partielles de $(-1)^{n+1} \sin(n\pi x)$ sont bornées (somme géométrique de raison $-e^{i\pi x} \neq 1$). Comme $e^{-Dn^2\pi^2 t}/n$ décroît en n et est majoré par $1/n$, le critère de Dirichlet donne une convergence uniforme en $t \geq 0$. On peut donc passer à la limite $t \rightarrow 0^+$ dans la série ; la question 5 donne alors $u(x, t) \rightarrow 2x$.

9. **Convergence uniforme vers l'équilibre.** Pour $x \in [0, 1]$ et $t > 0$, on utilise $|\sin(n\pi x)| \leq 1$, $1/n \leq 1$ et $n^2 \geq n$:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - x| &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-Dn^2\pi^2 t}}{n} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Dn\pi^2 t} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{e^{-D\pi^2 t}}{1 - e^{-D\pi^2 t}} = \boxed{\frac{2}{\pi(e^{D\pi^2 t} - 1)}}. \end{aligned}$$

Cette borne est indépendante de x et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$\sup_{x \in [0, 1]} |u(x, t) - x| \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire que $u(\cdot, t)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la solution stationnaire $x \mapsto x$.