

Projet de recherche

Denis Périce

I - Introduction générale

I.1 - Physique quantique à N corps

Le problème quantique à N -corps correspond à l'étude d'un système de N particules en interaction régies par les lois de la mécanique quantique. Typiquement, on cherche à calculer l'énergie du système, sa densité de particules où encore sa dynamique. En mécanique quantique, une particule placée dans un domaine Ω est décrite par un vecteur de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{C})$. Un système de N particules est quant à lui décrit par un élément de

$$L^2(\Omega, \mathbb{C})^{\otimes N} \cong L^2(\Omega^N, \mathbb{C})$$

L'énergie d'un système est décrite par un opérateur auto-adjoint agissant sur l'espace de Hilbert des états, appelé Hamiltonien. Lorsque l'on mesure l'énergie d'un système quantique, le résultat est une valeur propre de l'Hamiltonien, puis, l'état se retrouve projeté sur le sous-espace propre associé. Étant donné un état physique ψ , la densité de particules correspond au module carré de cet état, elle est ainsi intégrable. La dynamique est quant à elle régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t\psi = \mathcal{H}\psi$$

$\hbar$ est la constante de Planck réduite, elle définit l'échelle des phénomènes quantiques. L'Hamiltonien d'un système de N particules sans spin prend la forme :

$$\mathcal{H}_N := \sum_{i=1}^N (-\hbar^2 \Delta_i + V(x_i)) + \sum_{i<j} w(x_i - x_j) \quad (\text{I.1})$$

L'opérateur $-\Delta$ correspond à l'énergie cinétique du système. $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est le potentiel extérieur auquel sont soumises les particules. w représente le potentiel d'interaction entre une paire de particules. Les potentiels agissent multiplicativement sur les états physiques. Les notations $\Delta_i, V(x_i)$ signifient que ces opérateurs n'agissent que sur la $i^{\text{ième}}$ particule, autrement dit sur la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de $L^2(\Omega^N, \mathbb{C})$. $w(x_i - x_j)$ agit quant à lui sur la paire de particules (i, j) , c'est-à-dire sur la $i^{\text{ième}}$ et la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de $L^2(\Omega^N, \mathbb{C})$. L'Hamiltonien à N corps comprend alors la somme des énergies cinétiques et potentielles de chaque particule ainsi que la somme des interactions entre chaque paire de particules.

Dans un état physique à N corps $\psi_N \in L^2(\Omega^N, \mathbb{C})$, les densités des particules sont corrélées si ψ_N n'est pas factorisable sous la forme

$$\psi_N = u^{\otimes N}, \text{ avec } u \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$$

La résolution du problème quantique à N corps, c'est-à-dire la diagonalisation de l'Hamiltonien à N corps est en général particulièrement difficile à cause des interactions et des corrélations entre les particules. Même numériquement, l'étude de ce problème devient vite impossible pour de grandes valeurs de N .

I.2 - Régime de champ moyen et limite semi-classique

Notre objectif est l'obtention de théories effectives, plus simples, qui se prêtent mieux à une analyse numérique. Par exemple, si l'on cherche à calculer la densité de particules du système dans son état fondamental (celui de plus faible énergie), une théorie effective est appelée théorie fonctionnelle de la densité. À la place d'une minimisation sur l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, on peut alors minimiser une fonctionnelle qui ne dépend que de la densité. Les résultats mathématiques sur les théories fonctionnelles de la densité sont connus pour être utiles dans les méthodes numériques pour l'étalonnage des paramètres libres. Les théories fonctionnelles de la densité sont les principaux outils pour les calculs numériques quantiques, par exemple en chimie quantique où l'on veut calculer la densité électronique dans les systèmes moléculaires.

Pour obtenir des théories effectives, l'un des outils principaux est le champ moyen. Cela revient à supposer que les particules ne sont pas corrélées, c'est-à-dire que chaque particule ne voit que le potentiel moyen généré par les autres particules. On peut s'attendre à ce que cette approximation soit correcte pour de grands systèmes.

Les particules physiques étant indiscernables, la densité physique de particules doit être invariante par permutation des coordonnées. Il y a deux manières canoniques d'imposer cette symétrie sur $L^2(\Omega^N, \mathbb{C})$, permettant de modéliser des bosons ou des fermions. En effet, une fonction symétrique ou antisymétrique sous l'échange de deux coordonnées est respectivement appelée bosonique ou fermionique.

Lorsque l'on prend la limite $N \rightarrow \infty$, pour avoir une limite intéressante, il faut s'assurer que tous les termes de l'Hamiltonien (I.1) soient du même ordre de grandeur. Pour cela, on divise le terme d'interaction par N :

$$\mathcal{H}_N := \sum_{i=1}^N (-\hbar^2 \Delta_i + V(x_i)) + \frac{1}{N} \sum_{i < j} w(x_i - x_j) \quad (\text{I.2})$$

et l'on fixe $\hbar = 1$ pour des bosons ou $\hbar = N^{-\frac{1}{d}}$ pour des fermions. Cette particularité des fermions vient du principe de Pauli, qui rend l'énergie cinétique d'un système fermionique plus importante que celle d'un système bosonique. Pour des fermions, le régime de champ moyen est donc couplé à un régime semi-classique $\hbar \rightarrow 0$. C'est-à-dire qu'en considérant une limite où l'échelle des phénomènes quantiques tend vers 0, on espère obtenir une théorie classique.

II - Résultats et perspectives

II.1 - Champ moyen sous fort champ magnétique : statique

Lors de ma thèse [16], j'ai étudié des systèmes de fermions $2d$ en présence d'un champ magnétique. L'Hamiltonien à N -corps devient alors

$$\mathcal{H}_N := \sum_{i=1}^N ((-i\hbar \nabla_i + bA(x_i))^2 + V(x_i)) + \frac{1}{N} \sum_{i < j} w(x_i - x_j)$$

Le Laplacien est remplacé par le Laplacien magnétique incluant un potentiel vecteur A générant un champ magnétique constant, homogène et transverse au plan où sont confinés les particules :

$$\nabla \wedge A = (0, 0, 1)$$

Dans un premier résultat [4], nous étudions la limite de champ moyen, couplée à une limite semi-classique et fort champ magnétique, pour l'état fondamental du système de fermions. En physique classique, les particules chargées soumises à un champ magnétique transverse et homogène décrivent des orbites. En mécanique quantique, l'énergie cinétique est quantifiée en niveaux d'énergie discrets appelés niveaux de Landau, séparés par un gap constant. Les résultats principaux de cet article étendent des travaux de Lieb-Solovej-Yngvason [8] et Fournais-Madsen [15] en considérant un régime où le gap entre niveaux de Landau est l'échelle dominante d'énergie par rapport aux interactions. De plus, les particules sont placées dans un domaine borné, permettant à la dégénérescence des niveaux de Landau d'être finie. Nous obtenons ainsi un modèle limite où un nombre arbitraire de niveaux de Landau sont remplis. Les travaux existants, utilisant un confinement par un potentiel de piégeage, ne peuvent décrire cette situation. Nous discutons aussi de la physique du modèle limite dans le dernier niveau de Landau partiellement rempli.

Dans ce résultat, les hypothèses de régularité sur les potentiels ne sont pas optimales. Nous nous attendons à ce que ce résultat reste vrai si les potentiels ont une partie positive L^1 et une partie négative L^2 . Sous ces hypothèses, il faut prouver que les particules ne se concentreront pas dans les L^1 singularités positives des potentiels. Ceci a été fait dans [9] pour le potentiel de Coulomb.

Remplacer le Laplacien magnétique par l'opérateur de Dirac permettrait une description du graphène. En effet, dans le graphène, la relation de dispersion au niveau des cônes de Dirac dans la structure de bandes rend le transport des électrons relativiste. Le graphène est connu comme étant un bon matériau pour l'observation expérimentale de l'effet Hall quantique [14]. Il est donc intéressant de considérer un modèle pour des fermions $2d$ dans un cadre de relativité restreinte. L'opérateur de Dirac n'étant pas positif, on ferait l'hypothèse de la mer de Dirac, supposant que dans le vide, tous les états d'énergie négative sont occupés. Une difficulté pour ce résultat serait de gérer des potentiels généraux : en effet, cela demanderait d'adapter une inégalité de Lieb-Thirring pour l'opérateur de Dirac avec condition aux bords magnétiques périodiques.

Une autre piste intéressante à explorer serait de regarder le cas d'un champ magnétique non homogène (toujours transverse). En choisissant un champ magnétique suffisamment régulier, à l'échelle l_b , le champ magnétique se comporte comme une constante. Ainsi l'énergie cinétique reste localement quantifiée en niveaux de Landau. À plus long terme, cet axe de recherche pourrait ouvrir la voie à l'étude de limites de champ moyen pour des systèmes d'anyons, ces particules aux statistiques intermédiaires entre celles des bosons et des fermions. En effet, l'Hamiltonien décrivant un système d'anyons peut être réécrit sous la forme d'un Hamiltonien bosonique ou fermionique couplé à un champ magnétique très singulier et non homogène, dans lequel chaque particule porte un flux magnétique. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, ce modèle conduit naturellement à un régime de fort champ magnétique, puisque le nombre de flux est proportionnel au nombre de particules. Cela, nous offre donc la perspective d'analyser des systèmes anyoniques au-delà des régimes quasi-bosoniques ou quasi-fermioniques habituellement considérés. Dans un premier temps il s'agirait de considérer des anyons généralisés, en régularisant les singularités du champ magnétique.

II.2 - Champ moyen sous fort champ magnétique : dynamique

Dans le même contexte que la section précédente, nous avons aussi étudié [13] la dynamique du système avec comme point de départ l'équation de Hartree pour la première matrice densité :

$$i\hbar\partial_t\gamma = [(i\hbar\nabla + bA)^2 + V + w \star \rho_\gamma, \gamma]$$

où ρ_γ est la densité physique. Il est bien connu [1] [11] que cette équation peut être obtenue par une approximation de champ moyen de la dynamique de Schrödinger à N corps pour des fermions en interaction. Nous étudions une limite fort champ magnétique, couplée avec une limite semi-classique et prouvons que la densité converge vers une solution d'une équation de transport gyro-cinétique :

$$\partial_t\rho(t, x) + \nabla_x^\perp (V + w \star \rho)(t, x) \cdot \nabla_x\rho(t, x) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Dans un cadre de mécanique classique, des travaux de Golse-St-Raymond [10] obtiennent des résultats similaires avec comme point de départ l'équation de Vlasov. Plus récemment un travail dans la limite semi-classique de Ben Porat [6] traite le cas où le gap entre niveaux de Landau est très petit devant les interactions. La nouveauté principale de notre résultat est de considérer le régime quantique au départ où le gap entre niveaux de Landau est du même ordre de grandeur que l'énergie d'interaction. La preuve consiste à construire une densité semi-classique dont l'évolution en temps est obtenue puis comparée à l'équation cible.

Un projet connexe en cours de réalisation est de prendre comme point de départ l'équation de Schrödinger à N -corps à la place de la dynamique de champ moyen pour étudier la limite jointe champ moyen et semi-classique.

Ensuite, une amélioration importante de ce résultat serait de réduire la régularité demandée sur les potentiels. Dans ce but, on pourrait utiliser des méthodes similaires à [2]. Pour cela, il faudrait établir l'équation pour la dynamique à l'intérieur d'un niveau de Landau, afin de pouvoir contrôler l'équation pour la fonction de Husimi directement et non la densité physique. Pour la dynamique de la fonction de Husimi, on s'attend à obtenir, en plus de l'équation gyro-cinétique, un terme de saut entre niveaux de Landau. Ainsi on obtiendrait un système d'équations couplées avec une équation pour chaque niveau de Landau. Cela permettrait de construire un objet quantique, analogue à la quantification de Weyl de la densité sur l'espace des phases position-impulsion $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, à comparer à la matrice densité solution de l'équation de Hartree. Aussi, l'obtention de la propagation des moments de l'énergie cinétique d'ordre supérieur, faciliterait le contrôle des erreurs dans la dynamique de la première densité réduite. La propagation de certains commutateurs, entre γ_b et l'énergie cinétique ou des moments de l'opérateur position, pourraient aussi être utiles. Ces méthodes devraient aussi permettre d'améliorer la vitesse de convergence dans notre théorème.

II.3 - Champ moyen en grande dimensions : dynamique

Ce paragraphe est dédié à l'axe de recherche correspondant aux travaux effectués lors de mon postdoc [18] [17]. Le premier résultat, concernant la dynamique n'étant pas très long à énoncer, nous trouverons ci-dessous les définitions permettant de donner une version simplifiée du théorème.

Notre but est de justifier l'approximation de champ moyen dans la limite où la dimension de l'espace tend vers l'infini, et non dans la limite usuelle d'un grand nombre de particules dans le régime de champ moyen décrit en (I.2). En effet, dans la littérature physique, il est souvent affirmé que les théories de champ moyen sont exactes lorsque $d = +\infty$.

Pour cela, nous considérons le modèle de Bose-Hubbard, à la fois pour sa simplicité mathématique qu'il offre en tant que modèle sur un graphe fini, mais aussi pour sa pertinence reconnue en physique. Un des plus grands succès du modèle de Bose-Hubbard est la description d'une transition de phase entre un isolant de Mott et un superfluide [7]. L'utilité de la limite $d \rightarrow \infty$ est motivée par le fait que la théorie de champ moyen ainsi obtenue offre déjà des résultats quantitativement corrects en dimension $d = 3$ [5].

La limite de champ moyen obtenue dans [18] nous permet de décrire une transition de phase en partant d'un modèle quantique à N -corps, ce qui n'est généralement pas le cas dans la limite $N \rightarrow \infty$ usuelle. Notre résultat concerne la dynamique du système, qui est donc approchée par celle du modèle de champ moyen. Un autre avantage du régime $d \rightarrow \infty$ est qu'il permet de traiter les particules interagissant fortement. En effet, il n'est plus nécessaire de multiplier le terme d'interaction par le facteur de champ moyen N^{-1} qui revient à considérer un couplage faible entre les particules.

Soit $\Lambda := (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^d$ le graphe carré en dimension d avec conditions aux bords périodiques. À chaque sommet est associé un espace de Hilbert : $\ell^2(\mathbb{C})$ de base canonique $|n\rangle := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n^{\text{ème index}}, 0, \dots}), n \in \mathbb{N}$.

On définit les opérateurs de création $a^\dagger$ et d'annihilation a par

$$\begin{aligned} a|0\rangle &:= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a|n\rangle := \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^\dagger|n\rangle &:= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned}$$

ainsi que l'opérateur nombre de particules $\mathcal{N} := a^\dagger a$. L'espace de Fock est alors

$$\mathcal{F} := \ell^2(\mathbb{C})^{\otimes |\Lambda|} \cong \mathcal{F}_+ (L^2(\Lambda, \mathbb{C})) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^2(\Lambda, \mathbb{C})^{\otimes n}$$

Si A est un opérateur sur $\ell^2(\mathbb{C})$ et $x \in \Lambda$, on note A_x l'opérateur sur $\mathcal{F}$ agissant sur le sommet x comme A et comme l'identité sur les autres sites.

L'Hamiltonien de Bose-Hubbard

$$H_d := -\frac{J}{2d} \overbrace{\sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ x \sim y}} a_x^\dagger a_y}^{\mathcal{O}(2d|\Lambda|)} + (J - \mu) \sum_{x \in \Lambda} \mathcal{N}_x + \frac{U}{2} \sum_{x \in \Lambda} \mathcal{N}_x (\mathcal{N}_x - 1)$$

où $J \in \mathbb{R}$ est l'amplitude de saut (d'un sommet à un plus proche voisin), $\mu \in \mathbb{R}$ le potentiel chimique et U la force de l'interaction entre deux particules sur un même site. Ici, il est important de remarquer que les rôles du terme d'interaction et de l'énergie cinétique sont échangés par rapport à la limite $N \rightarrow \infty$ usuelle. En effet, pour notre scaling $d \rightarrow \infty$, le terme d'énergie cinétique est un terme agissant sur 2 sites simultanément, alors que les interactions entre particules n'ont lieu que sur le même site. C'est donc le terme de saut qu'il nous faut approximer

par une méthode de champ moyen et non l'interaction. L'amplitude de saut doit alors être divisée par la coordonnée du graphe, $2d$, pour obtenir des termes du même ordre de grandeur.

La dynamique considérée peut s'écrire pour une matrice densité $\gamma_d \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}^1(\mathcal{F}))$:

$$i\partial_t \gamma_d(t) = [H_d, \gamma_d(t)] \quad (\text{B-H})$$

où $\mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ est la classe trace sur $\mathcal{F}$.

Finalement, on définit la densité réduite à un sommet :

$$\gamma_d^{(1)} := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \text{Tr}_{\Lambda \setminus \{x\}}(\gamma_d)$$

La théorie de champ moyen obtenue dans la limite $d \rightarrow \infty$ est donc une théorie sur un sommet. L'Hamiltonien est donné pour un état $\varphi \in \ell^2(\mathbb{C})$:

$$h^\varphi := -J(\overline{\alpha_\varphi}a + \alpha_\varphi a^\dagger - |\alpha_\varphi|^2) + (J - \mu)\mathcal{N} + \frac{U}{2}\mathcal{N}(\mathcal{N} - 1)$$

Avec le paramètre d'ordre

$$\alpha_\varphi := \langle \varphi | a \varphi \rangle$$

Cette théorie exhibe une transition de phase entre un isolant de Mott (MI) lorsque $\alpha_\varphi = 0$ et un superfluide (SF) lorsque $\alpha_\varphi > 0$.

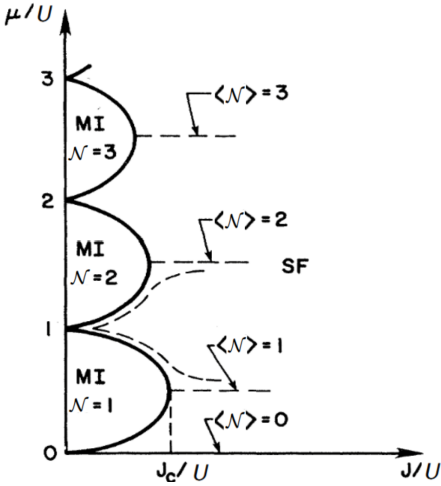


FIGURE 1 – Diagramme de phase isolant de Mott (MI) \ superfluide (SF) [5], obtenu en minimisant la fonctionnelle d'énergie de champ moyen :

$\langle \varphi | h_\varphi \varphi \rangle = -J|\alpha_\varphi|^2 + (J - \mu) \langle \varphi | \mathcal{N} \varphi \rangle + \frac{U}{2} \langle \varphi | \mathcal{N}(\mathcal{N} - 1) \varphi \rangle$.
Étant donné un état fondamental $\varphi(J, \mu, U)$, la phase isolant de Mott est définie comme la région où $\alpha_\varphi(J, \mu, U) = 0$.

La dynamique associée est

$$i\partial_t \varphi(t) = h^{\varphi(t)} \varphi(t) \quad (\text{mf})$$

Avec une dernière notation

$$p_\varphi := |\varphi\rangle \langle \varphi| \quad q_\varphi := 1 - p_\varphi$$

on peut énoncer le résultat principal de [18],

Theorem II.1: *S.Farhat D.P S.Petrat 2025*

Si

- γ_d est solution de (B-H) avec $\gamma_d(0) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ tel que $\text{Tr}(\gamma_d(0)) = 1$
- φ est solution de (mf) avec $\varphi(0) \in \ell^2(\mathbb{C})$ tel que $\|\varphi\|_{\ell^2} = 1$
- $\exists c_1, c_2 > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Tr}(p_\varphi(0)\mathbb{1}_{\mathcal{N}=n}) \leq c_1 e^{-\frac{n}{c_2}} \quad \text{Tr}\left(\gamma_d^{(1)}(0)\mathbb{1}_{\mathcal{N}=n}\right) \leq c_1 e^{-\frac{n}{c_2}}.$$

Alors $\exists C := C(J, c_1, c_2, \text{Tr}(p_\varphi(0)\mathcal{N})) > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left\| \gamma_d^{(1)}(t) - p_\varphi(t) \right\|_{\mathcal{L}^1} \leq e^{te^{C(t+1)}\sqrt{\ln(d)}} \left(\left\| \gamma_d^{(1)}(0) - p_\varphi(0) \right\|_{\mathcal{L}^1} + \frac{1}{d\sqrt{\ln(d)}} \right)$$

Ce théorème nous permet de propager l'écart entre la solution de dynamique donnée par le modèle de Bose-Hubbard et celle de champ moyen : si $\left\| \gamma_d^{(1)}(0) - p_\varphi(0) \right\|_{\mathcal{L}^1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{d}\right)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left\| \gamma_d^{(1)}(t) - p_\varphi(t) \right\|_{\mathcal{L}^1} \leq 2e^{te^{C(t+1)}\sqrt{\ln(d)-\ln(d)}} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0$$

Une autre conséquence est la convergence du paramètre d'ordre :

$$\left\| \left(\gamma_d^{(1)} - p_\varphi \right) a \right\|_{\mathcal{L}^1} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0$$

Dans l'article nous traitons aussi l'existence et l'unicité de la solution à la dynamique de champ moyen.

Un autre objectif naturel serait d'étendre cette approche au modèle de Fermi-Hubbard. À plus long terme, il serait également pertinent d'affiner la dépendance en d dans notre estimation, dans l'idéal jusqu'à obtenir des résultats exploitables dès la dimension $d = 3$. Pour avancer dans cette direction, nous avons pour projet de calculer et incorporer des corrections à la dynamique de champ moyen, dans l'espoir de démontrer une borne incluant des puissances supérieures de d^{-1} .

II.4 - Champ moyen en grande dimensions : statique

Dans un résultat plus récent [17], nous étudions l'analogue du théorème II.1 pour l'énergie fondamentale en introduisant une généralisation du théorème de De Finetti quantique (voir [12] pour une revue sur ce sujet). Nous étendons également le contexte introduit ci-dessus à des graphes généraux dans la limite d'une grande coordinence (c'est-à-dire un grand nombre de plus proches voisins dans le graphe). Cet outil s'avère applicable à l'étude d'une impureté évoluant dans un champ bosonique. Selon les modèles considérés, cette particule est couramment appelée *tracer particle* ou encore *polaron*. Notre objectif est de compléter les travaux existants, notamment [3], en utilisant le théorème de De Finetti quantique introduit dans [17] pour traiter un modèle incluant un potentiel extérieur, ce qui constituerait une nouveauté dans le domaine.

Nous travaillons actuellement à étendre le résultat principal de [17] afin d'obtenir la convergence de l'état fondamental, ainsi qu'une estimation de la vitesse de convergence. Un autre axe

de recherche consiste à considérer des variations du modèle de Bose–Hubbard, par exemple en traitant le cas d’un graphe infini, en considérant une amplitude de saut qui varie en fonction de la distance dans le graphe pour plus de réalisme physique, on encore en incluant un potentiel extérieur inhomogène. Dans ce dernier cas, nous nous attendons à ce que la factorisation reste valide dans la limite d’une grande coordinence, mais la théorie de champ moyen obtenue dépendrait alors de la position dans le graphe.

Bibliographie



- [1] N.Benedikter M.Porta B.SCHLEIN. “Mean–Field Evolution of Fermionic Systems”. In : *Communications in Mathematical Physics* (2014). DOI : <https://arxiv.org/abs/1305.2768>.
- [2] J.Chong L.Laflèche C.SAFFIRIO. “From Schrödinger to Hartree-Fock and Vlasov equations with Singular potentials”. In : (2021).
- [3] E. CÁRDENAS. “Tracer particles coupled to an interacting boson gas”. In : *Journal of Functional Analysis* (2022).
- [4] D.PÉRICE. “Multiple Landau level filling for a mean field limit of 2D fermions”. In : *J. Math. phys.* (2024). DOI : <https://doi.org/10.1063/5.0133977>.
- [5] M.P.A. Fisher P.B.Weichman G.Grinstein D.S.FISHER. “Boson localization and the superfluid-insulator transition”. In : *Phys. Rev. B* (1989). DOI : <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.546>.
- [6] I.B.PORAT. “Derivation of Euler’s equations of perfect fluids from von Neumann’s equation with magnetic field”. In : (2022). DOI : <https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.01158>.
- [7] M.Greiner O.Mandel T.Rom A.Altmeyer A.Widera T.W.Hänsch I.BLOCH. “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in an ultracold gas of atoms”. In : *Physica B : Condensed Matter* (2003). DOI : [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(02\)01872-0](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(02)01872-0).
- [8] E.H.Lieb J-P.Solovej J.YNGVASON. “Asymptotics of Heavy Atoms in High Magnetic Fields I. Lowest Landau Band Region”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* (1994). DOI : <https://doi.org/10.1002/cpa.3160470406>.
- [9] E.H.Lieb J-P.Solovej J.YNGVASON. “Ground states of large quantum dots in magnetic fields”. In : *Physical review B* (1995). DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-662-03436-1_15.
- [10] F.Golse L.SAINT-RAYMOND. “The Vlasov–Poisson System with Strong Magnetic Field”. In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1999). DOI : [https://doi.org/10.1016/S0021-7824\(99\)00021-5](https://doi.org/10.1016/S0021-7824(99)00021-5).

- [11] F.Golse T.Paul M.PULVIRENTI. “On the derivation of the Hartree equation from the N-body Schrödinger equation : Uniformity in the Planck constant”. In : *Journal of Functional Analysis* (2016).
- [12] N.ROUGERIE. *Théorèmes de de Finetti, limites de champ moyen et condensation de Bose-Einstein*. Spartacus-Idh, 2016. URL : <https://spartacus-idh.com/liseuse/012/>.
- [13] D.Périce N.ROUGERIE. “Gyrokinetic limit of the 2D Hartree equation in a large magnetic field”. In : (2024). DOI : <https://arxiv.org/abs/2403.19226>.
- [14] Y.Zhang Y-W.Tan H.L.Stormer P.KIM. “Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry’s phase in graphene”. In : *Nature* (2005). DOI : <https://doi.org/10.1038/nature04235>.
- [15] S.Fournais P.MADSEN. “Semi-classical limit of confined fermionic systems in homogeneous magnetic fields”. In : *Annales Henri Poincaré* (2020). DOI : <https://doi.org/10.1007/s00023-019-00880-6>.
- [16] D. PÉRICE. *Semi-classical limits of 2D fermions under high magnetic fields*. 2023. URL : https://denis-perice.github.io/publications/Semi-classical%20limits%20of%202D%20fermions%20under%20high%20magnetic%20fields_white.pdf.
- [17] S.Farhat D.Périce S.PETRAT. “Ground state energy of the Bose–Hubbard model with large coordination number with a polaron-type quantum de Finetti theorem”. In : *preprint* (2026). URL : <https://arxiv.org/abs/2603.29562>.
- [18] S.Farhat D.Périce S.PETRAT. “Mean-Field Dynamics of the Bose-Hubbard Model in High Dimension”. In : *preprint* (2025). DOI : <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.05304>.